Q
46
S6784
NH

S. I. LIBRARY

t 24
3
48611
Smith
29

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME II

N° 1

1910

PARIS
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
A LA SORBONNE

1910

Le Secrétaire-Gérant
H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons bimestrielles.

Smithsonian Institution
MAY 14 1910
217313
National Museum.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1910

Président : M. R. Perrin, 61, rue de Vaugirard.
Vice-Président : M. C. Matignon, 17, B^d Carnot, Bourg-la-Reine.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.
Vice-Secrétaire des séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 118, avenue d'Orléans.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V^e.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

DIXIÈME SÉRIE. — TOME II

1910

PARIS
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
A LA SORBONNE
—
1910

217313

Membres du Conseil

pour les années 1909, 1910 *et* 1911

MM.

André, 70 *bis*, rue Bonaparte.

D. Berthelot, 21, rue de Tournon.

Dongier, 87 *bis*, Grande-Rue, Bourg-la-Reine.

Grévy, 62, rue Saint-Placide.

Henneguy, 9, rue Thénard.

Laisant, 162, avenue Victor-Hugo.

Lévy (Lucien), 12, rue du Regard.

Vaillant, 36, rue Geof.-St.-Hilaire.

Membres du Bureau

pour 1909

Président : M. C. Matignon, 17, boulevard Carnot, Bourg-la-Reine.

Vice-Président : M. Hua, 254, boulevard Saint-Germain.

Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.

Secrétaire des Séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.

Vice-Secrétaire des Séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.

Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 118, avenue d'Orléans.

Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.

Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

ABRÉVIATIONS

A.M.	Assistant au Muséum.
E.E.P.	Examinateur à l'Ecole Polytechnique.
I.P.C.	Ingénieur des Ponts et Chaussées.
I.G.M.	Inspecteur général des Mines.
I.G.A.	— — de l'Agriculture.
M.A.M.	Membre de l'Académie de Médecine.
M.I.	— de l'Institut.
M.C.	Maître de conférences.
P.C.F.	Professeur au Collège de France.
P.A.M.	— au Conservatoire des Arts et Métiers.
P.E.N.	— à l'Ecole normale supérieure.
P.E.M.	— — des Mines.
P.E.P.	— — Polytechnique.
P.P.C.	— — des Ponts et Chaussées.
P.E.Ph.	— — Supérieure de Pharmacie.
P.F.M.	— à la Faculté de Médecine.
P.F.S.	— — des Sciences.
P.M.	— au Muséum.
P.H.	Professeur honoraire.

ÉTUDE ET AMITIÉ

LISTE DES MEMBRES

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Fondée en 1788

État de la Société en Mars 1910

PREMIÈRE SECTION.— SCIENCES MATHÉMATIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1859 (12 fév.). Lévy (Maurice), M. I., P. C. F., 15, avenue du Trocadéro.
1860 (2 juin). Haton de La Goupillière (J.-Napoléon), M. I., 56, rue de Vaugirard.
1861 (13 avril). Tissot (Nic.-Aug.), E. E. P., à Voreppe (Isère).
1863 (28 mars). Rouché (Eugène), M. I., 213, boulevard Saint-Germain.
1871 (23 déc.). Collignon (Édouard), 6, rue de Seine.
— *id.* Darboux (Gaston), M. I. (Secrétaire perpétuel), Doyen Hon. F. S., 36, rue Gay-Lussac.
1872 (27 janv.). Jordan (Camille), M. I., P. E. P., P. C. F., 48, rue de Varennes.
1875 (26 juin). Fouret (Georges), E.E.P., 4, avenue Carnot.
1876 (23 déc.). Picquet (Henri), E. E. P., 4, rue Monsieur-le-Prince.
— *id.* André (Désiré), P. H., 70 *bis*, rue Bonaparte
1878 (26 janv.). Leauté, M. I., 20, boulevard de Courcelles.
— (9 fév.). Laisant, E. E. P., 5, rue du Conseil, à Asnières (Seine).

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1878 (9 fév.). Tannery, Dir. des Sc. E. N., 45, rue d'Ulm.
1881 (11 fév.). C. de Polignac, Radmannsdorf, Carniole (Autriche).
— *id.* Humbert (Georges), M. I., 6, rue d'Aubigny.
— (12 nov.). Chemin, P. P. C., 33, avenue Montaigne.
1884 (3 nov.). Lévy (Lucien), E. E. P., 12, rue du Regard.
1887 (17 déc.). Kœnigs, P. F. S., 101, boulevard Arago.
1892 (26 janv.). Bioche, Prof. Louis-le-G., 56, rue N.-D.-des-Champs.
1900 (10 mars). Leau, Prof. Stanislas, 6, rue Vavin.
— (22 déc.). Le Roy, Prof. Stanislas, 117, boulevard Raspail.
1902 (27 juin). Deschamps, 195, rue de Tolbiac.
1902 (13 déc.). Grévy, Prof. Saint-Louis, 71, rue Claude-Bernard.
1904 (20 nov.). Perrin (R.), I.G.M., 61, rue de Vaugirard.
1905 (14 janv.). Maillet, I. P. C., 11, rue de Fontenay, à Bourg-la-Reine (Seine).
1905 (27 mai). Servant, Chef des tr. F.S., 8, rue des Saints-Pères.
1906 (24 fév.). Lebon (Ernest), P. H., 4 *bis*, rue des Écoles.
1906 (12 mai). Tarry (Gaston), 182, boulevard de Strasbourg, Le Havre.
— (8 déc.). Fatou, astronome adjoint à l'Observatoire, 172, boulevard Montparnasse.
— (22 déc.). Henri (Victor), M. C. (Htes Études), 82, rue Claude-Bernard.
1907 (11 mai). Chapelon (J.-J.), Ing. au Corps des M., 21, rue Bréa.
1908 (9 mai). Rousier, 206, boulevard Raspail.
1909 (26 juin). Léauté (André) 60, boulevard Saint-Michel.
1909 (15 mars). Léauté (A.), Ing. au Corps des M., École des Mines.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (28 mars). Lieutenant-Colonel du Génie Brocard, 75, rue des Ducs, Bar-le-Duc.
1905 (11 fév.). Berdon (Louis), 39, Cadogan Street, Londres S. W.
1906 (25 juin). Guccia, Palerme.
1907 (9 fév.). Desmoulin, P. F. S., 10, rue Joseph-Plateau, Gand.
1908 (12 déc.). A. Gérardin, 32, quai Claude-le-Lorrain, Nancy.

DEUXIÈME SECTION. — SCIENCES PHYSIQUES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1862 (10 juill.). Troost (Louis), M. I., P. H. F. S., 84, rue Bonaparte.
1863 (18 juill.). Grandeau (Louis), I. G. A., 4, avenue de La Bourdonnais.
1864 (31 janv.). Wolf (Charles), M. I., P. H. F. S., 36, avenue de l'Observatoire.
1872 (22 juin). Gernez (Désiré), M. I., P. E. N., 80, rue d'Assas.
1873 (12 avril). Fron, Météorologiste tit., 19, rue de Sèvres.
1874 (23 mai). Branly, Prof. Inst. Catholique, 21, av. de Tourville.
1875 (10 avril). Cailletet, M. I., 75, boulevard Saint-Michel.
1876 (27 mai). Bouty, M. I., P. F. S., 5, Faubourg Saint-Jacques.
1877 (24 fév.). Lippmann (Gabriel), M. I., P. F. S., 10, rue de l'Éperon.
1882 (11 fév.). Cochin, député, 53, rue de Babylone.
1884 (9 avril). Bourgeois (Léon), A. M., 1, boulevard Henri-IV.
1886 (17 avril). Bordet (Lucien), 181, boulevard Saint-Germain.
1887 (9 juillet). Vallot (Joseph), Directeur de l'Obs. du Mont-Blanc, 37, rue Cotta, à Nice.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1901 (26 janv.). Vincent, Prof. Saint-Louis, 207, rue de Vaugirard.
— (14 déc.). Benoist, Prof. Henri-IV, 26, rue des Écoles.
— (28 déc.). Dongier, Météor. tit. Obs. de Paris, 99, Grande-Rue, à Bourg-la-Reine (Seine).
— (13 déc.). Matignon, P. C. F., 17, boul. Carnot, Bourg-la-Reine.
1903 (28 fév.). Winter, 44, rue Saint-Placide.
— (14 mars). Berthelot (Daniel), P. E. Ph., 21, rue de Tournon.
— *id.* Desgrez, P. A. F. M., 78, boulevard Saint-Germain.
— (12 déc.). Darzens, Répét. E. P., 22, avenue Ledru-Rollin.
1904 (23 janv.). Chauveau, Météor. adj. Obs. de Paris, 51, rue de Lille.

1904 (29 mai). Moureu, M. A. M., P. E. Ph., 15, rue Soufflot.
— *id.* Mahler, Ingénieur civil des Mines, 2, rue Decamps.
— (9 juillet). Marage, 14, rue Duphot.
1905 (14 janv.). Hallion, chef de Lab. C. F., 54, faub. Saint-Honoré.
— (11 mars). Valeur, P. A. E. Ph., 73, boulevard Montparnasse.
— (1er avril). Goutal, P. suppl. E. M., 60, boulevard Saint-Michel.
— (13 mai). Mouneyrat, 20, rue Godot-de-Mauroi.
1906 (13 janv.). Mayer, M. C. (Hautes-Études), 33, rue du Faubourg-Poissonnière.
— (24 fév.). Joannis, P. F. S., 7, rue des Imbergères, Sceaux.
1907 (14 déc.). Becquerel (Jean), I. P. C., P. M., 15, boulevard Saint-Germain.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1905 (13 mai). Mathias, P. F. S., 44, allées Lafayette, à Toulouse.
— (22 juil.). Monpillard, 22, boulevard Saint-Marcel.

TROISIÈME SECTION. — SCIENCES NATURELLES

MEMBRES HONORAIRES

MM.

1856 (20 déc.). Prillieux (Ed.), M. I., sénateur, 14, rue Cambacérès.
1862 (7 mai). Bureau (Ed.), P. H. M., M. A. M., 24, quai de Béthune.
1863 (31 janv.). Vaillant (L.-L.), P. M., 36, rue Geof.-Saint-Hilaire.
1871 (9 déc.). De Seynes (Jules), P. A. F. M., 15, rue Chanaleilles.
— (23 déc.). Grandidier (A.), M. I., 71 *bis*, rue du Ranelagh.
— (26 déc.). Van Tieghem (Philippe), M. I., P. M., 22, rue Vauquelin.
1871 (26 déc.). Chatin (J.), M. I., M. A. M., P. F. S., 174, boulevard Saint-Germain.
1879 (10 mai). Henneguy (Louis-Félix), M. I., M. A. M., P. C. F., 9, rue Thénard.
1883 (26 mai). Mocquard, A. M. hon., 55, rue du Mont-Valérien, à Suresnes (Seine).
1886 (13 fév.). Bouvier (E. L.), M. I., P. M., 7, boulevard Arago.

1888 (11 fév.). Morot, A. M., 9, rue du Regard.
1890 (21 fév.). Roché, 4, rue Dante.
1893 (11 mars). Hua, Direct. adj. de Lab. (Htes Etudes), 254, boulevard Saint-Germain.
— (10 juin). Jousseaume, 29, rue Gergovie.
1893 (27 oct.). De Guerne, 6, rue de Tournon.
1894 (17 mars). Roland Bonaparte, M. I., 10, avenue d'Iéna.
1899 (14 janv.). Lecaillon, Prép. C. F., 28, rue Berthollet.
1899 (25 mars). Neuville, Prép. Mus., 55, rue de Buffon.

MEMBRES TITULAIRES

MM.

1889 ( ). Menegaux, A. M., 55, rue de Buffon (réintégré le 23 avril 1904).
1901 (12 janv.). Pellegrin, A. M., 143, rue de Rennes.
— (18 mai). Guieysse, Chef de Lab. F. M., 63, boulevard Saint-Michel.
1901 (11 janv.). Chauveau, Direct. adj. de Lab. (Hautes-Etudes), 16, avenue d'Orléans.
— (8 fév.). Rabaud, M. C. F. S., 3, rue Vauquelin.
— (27 juin). Lesage, Méd. des Hôp., 226, boulevard Saint-Germain.
— (22 nov.). Anthony, Prép. Muséum, 12, rue Chevert.
1903 (28 fév.). Coutière, P. E. Ph., 118, Avenue d'Orléans.
— (11 avril). Langeron, Prép. F. M., 78, rue de l'Abbé-Groult.
— (27 juin). Noé, Prép. F. M., 51, boulevard Montparnasse.
1904 (9 janv.). Grandidier (G.), 2, rue Gœthe.
— (23 janv.). De Boissieu, 80, avenue d'Iéna.
— *id.* Joubin, P. M., 88, boulevard Saint-Germain.
— (26 mars). Gravier, A. M., 55, rue de Buffon.
— (29 mai). Michel (Auguste), Prof. Michelet, 7, rue Nicole.
— (9 juil.). Launoy (L.), Prép. Inst. Pasteur.
1905 (28 janv.). Cayeux, P. E. M., P. I. A., 6, place Denfert-Rochereau.
— (8 juil.). Lemoine (Paul), Chef des trav. Muséum, 96, boulevard Saint-Germain.
1909 (13 mars). Legendre (R.), Prép. Mus., 24, rue Boissonnade.
— (26 juin). Rivet, A. M., 61, rue de Buffon.

MEMBRES CORRESPONDANTS

MM.

1903 (27 juin). L. Petit, 211, rue de l'Église Saint-Seurin, à Bordeaux.
— (28 nov.). Devez, Cayenne.
1904 (23 avril). Bull, Prép. à l'Institut Marey, 1, avenue Malakoff.
— *id.* Tur, Ass. à l'Univ. de Varsovie.
— *id.* Malard, Chef de travaux Lab. de Zool. marit., St-Vaast-la-Hougue (Manche).
— (29 mai). Marceau, P. E. M., Besançon, à l'École de Médecine.
1905 (26 nov.). Maignon, Chef des trav. de Physiol., E. Vét. de Lyon.
— (11 mars). Neveu-Lemaire P. A. F. M., Lyon, à l'École de Médecine.
— (15 avril). Diguet (L.), 16, rue Lacuée.
1906 (24 févr.). Osman Galeb Bey, le Caire (Égypte).
1908 (25 avril). J. Jarricot, chef de lab. F. M., 9, cours Gambetta, Lyon.
1909 (26 juin). Fauré-Frémiet, 154, boulevard Malesherbes.
— — Semichon, prép. Museum, 27, rue Cassette.
— — Terroine, 4, rue des Fossés-Saint-Marcel.

NOTES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

APPLICATIONS DE NOS IDENTITÉS FONDAMENTALES [1]

Par M. le Dr Joseph DESCHAMPS.

Nous avons donné, à la fin de notre précédent mémoire, les premières applications les plus simples des identités que nous avons établies comme fondements de la théorie des formes quadratiques. Au lieu de suivre l'ordre logique qui consisterait à montrer comment ces identités s'appliquent aux diverses questions de la géométrie plane, nous préférons, pour montrer d'une manière plus frappante l'importance de nos identités, faire voir comment elles se présentent, dès les premiers débuts, en géométrie de l'espace aussi bien qu'en géométrie plane, dans toutes les questions d'angles et de distances. Cela nous permettra non seulement d'établir les analogies depuis longtemps constatées entre les géométries à deux et à trois dimensions, mais surtout de montrer combien est général et fréquent l'emploi de nos formules.

Nous nous attacherons en même temps à mettre en évidence l'unité de méthode qui aboutit à l'unité de forme dans les résultats.

Nous nous servirons, pour commencer, des coordonnées cartésiennes.

I. — FORME QUADRATIQUE SPHÉRIQUE ET FORME TANGENTIELLE CORRESPONDANTE. — SINUS DU TRIÈDRE DES AXES

Étant choisis trois axes de coordonnées OX, OY, OZ, faisant entre eux des angles :

$$YOZ = \lambda,$$
$$ZOX = \mu,$$
$$XOY = \nu,$$

la position d'un point M est complètement déterminée par ses trois coordonnées x, y, z. Il s'impose immédiatement d'exprimer en fonction de ces coordonnées la distance $OM = \rho$ du point à l'origine.

(1) Voir *Bulletin de la Société Philomatique*, série X, t. I, n° 4-5-6, 1909.

Projetons pour cela le contour des coordonnées du point successivement sur OX, OY, OZ et OM, nous aurons, en désignant par α, β, γ les angles respectifs de la droite OM avec les axes, les relations suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} x + y\cos\nu + z\cos\mu - \rho\cos\alpha = 0 \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda - \rho\cos\beta = 0 \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z - \rho\cos\gamma = 0 \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0. \end{cases}$$

Multiplions les trois premières respectivement par x, y, z, et ajoutons-les en tenant compte de la quatrième ; nous trouvons ainsi :

$$(2)\qquad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

formule qui résout la question proposée.

La distance cherchée ρ est donc intimement liée à la forme quadratique à trois variables

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

que nous désignerons par R (x, y, z) ou simplement par R, et qu'il est naturel d'appeler la forme sphérique, puisque l'équation (2) est au fond de l'équation de la sphère de centre O et de rayon ρ.

Or à la fonction R se rattache immédiatement et nécessairement son discriminant :

$$(3)\qquad T = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix};$$

dont la valeur développée est :

$$T = 1 + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu,$$

Ce déterminant dont les éléments sont exclusivement formés par les cosinus des angles des axes deux à deux, a été appelé *le sinus du trièdre des axes*. La raison de cette dénomination est que le déterminant T, toujours différent de zéro, est constamment positif et non supérieur à 1, ainsi que cela a été démontré depuis longtemps.

Déterminant réciproque du déterminant T. — Les mineurs principaux du déterminant T sont :

$$\begin{cases} 1 - \cos^2 \lambda = \sin^2 \lambda \\ 1 - \cos^2 \mu = \sin^2 \mu \\ 1 - \cos^2 \nu = \sin^2 \nu; \end{cases}$$

et les mineurs non principaux :

$$\begin{cases} \cos \mu \cos \nu - \cos \lambda \\ \cos \nu \cos \lambda - \cos \mu \\ \cos \lambda \cos \mu - \cos \nu, \end{cases}$$

que, pour abréger, nous désignerons par Λ, M, N. Avec ces notations, le déterminant réciproque T_r du déterminant T est :

$$(4) \qquad T_r = \begin{vmatrix} \sin^2 \lambda & N & M \\ N & \sin^2 \mu & \Lambda \\ M & \Lambda & \sin^2 \nu \end{vmatrix},$$

et l'on sait qu'on a :

$$(5) \qquad T_r = T^2,$$

Nous remarquerons incidemment que les propriétés des déterminants réciproques nous donnent l'identité :

$$\sin^2 \mu \sin^2 \nu - \Lambda^2 = T$$

ou :

$$(6) \qquad \sin^2 \mu \sin^2 \nu - (\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda)^2 = T,$$

La transformation en produit de la différence des carrés qui constitue le premier membre conduit à l'identité :

$$(7) \qquad T = 4 \sin \frac{\lambda + \mu + \nu}{2} \sin \frac{\mu + \nu - \lambda}{2} \sin \frac{\nu + \lambda - \mu}{2} \sin \frac{\lambda + \mu - \nu}{2},$$

On obtient ainsi sans artifice aucun les formules (7) et (6), qui établissent les propriétés rappelées du sinus du trièdre des axes.

Forme tangentielle réciproque de la forme sphérique. — Menons par l'origine une droite OD de direction déterminée, faisant avec les

axes des angles α, β, γ. Il est facile de constater géométriquement que ces trois angles ne sont pas indépendants. Pour trouver analytiquement la relation qui les lie, il suffit de prendre sur la droite OD un point M de coordonnées x, y, z et ρ, et de projeter, comme on l'a déjà fait, le contour de ces coordonnées, ce qui fournit les relations (1) écrites plus haut. En éliminant x, y, z et ρ entre ces quatre relations, on obtient la relation cherchée :

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui détermine un des cosinus en fonction des deux autres.

Cette relation peut encore s'écrire :

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Le second déterminant est la forme tangentielle réciproque de la forme sphérique R. Nous la désignerons par Γ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) ou simplement par Γ; en d'autres termes, nous posons l'égalité conventionnelle :

$$(10) \qquad \Gamma = - \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

ou en développant le second membre :

$$(10') \qquad \begin{aligned} \Gamma = \quad & \sin^2\lambda \cos^2\alpha + 2\Lambda \cos\beta \cos\gamma \\ & + \sin^2\mu \cos^2\beta + 2M \cos\gamma \cos\alpha \\ & + \sin^2\nu \cos^2\gamma + 2N \cos\alpha \cos\beta. \end{aligned}$$

La relation (9) peut alors s'écrire :

$$(11) \qquad \Gamma = T.$$

On voit ainsi que, *quelle que soit la direction considérée, la fonction quadratique* Γ *qui s'y rattache conserve une valeur constante.*

Quant à la fonction ponctuelle R dont nous avons donné l'expression développée :

$$R = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos\lambda + 2zx \cos\mu + 2xy \cos\nu,$$

elle peut s'écrire sous forme de déterminant de la manière suivante :

$$(12) \qquad R = -\frac{1}{T}\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}.$$

Il en résulte pour la distance à l'origine du point (x, y, z) :

$$(13) \qquad \rho^2 = R = -\frac{1}{T}\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}.$$

Application. — *Calcul de l'angle que fait avec l'un des axes de coordonnées la perpendiculaire au plan des deux autres.* — Menons par l'origine une perpendiculaire au plan YOZ du même côté que la direction positive de l'axe OX, et désignons par l l'angle de cette droite avec OX. Comme elle fait avec les deux autres axes des angles droits, la relation

$$\Gamma = T$$

se réduit à :

$$\sin^2\lambda \cos^2 l = T,$$

d'où l'on tire :

$$\cos l = \frac{\sqrt{T}}{\sin\lambda}.$$

En menant de même des perpendiculaires aux autres plans coordonnés, on a la série :

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} \cos l &= \frac{\sqrt{T}}{\sin\lambda}. \\ \cos m &= \frac{\sqrt{T}}{\sin\mu} \\ \cos n &= \frac{\sqrt{T}}{\sin\nu}. \end{aligned}\right.$$

Volume du tétraèdre construit sur les coordonnées d'un point. — Soient $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ les coordonnées du point M ; nous nous proposons de calculer le volume du tétraèdre OABC. Prenons

pour base de ce tétraèdre le triangle OBC et pour hauteur la perpendiculaire AD $= h$ menée à cette base du sommet opposé A; nous aurons :

$$6V = yz \sin \lambda \times h.$$

Or :

$$h = x \cos l$$
$$= \frac{x\sqrt{T}}{\sin \lambda}.$$

Il en résulte :

(15) $$6V = xyz \sqrt{T}.$$

En particulier le tétraèdre dont les trois arêtes sont égales à l'unité a pour expression :

(16) $$6V = \sqrt{T}.$$

Cette formule fournit la signification géométrique du déterminant T.

Pour terminer ces considérations relatives à un point et à une direction, calculons les angles α, β, γ que fait avec les axes le rayon vecteur OM d'un point M déterminé par ses coordonnées x, y, z. Ces angles sont fournis par les trois premières formules (1), desquelles on tire :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{x + y \cos \nu + z \cos \mu}{\rho} \\ \cos \beta = \dfrac{x \cos \nu + y + z \cos \lambda}{\rho}, \\ \cos \beta = \dfrac{x \cos \mu + y \cos \lambda + z}{\rho}. \end{cases}$$

En remplaçant ρ par sa valeur en fonction de x, y, z, et en remarquant que les numérateurs précédents sont les demi-dérivées partielles de la fonction R, il vient :

(17) $$\begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{\frac{1}{2} R'_x}{\sqrt{R}} \\ \cos \beta = \dfrac{\frac{1}{2} R'_y}{\sqrt{R}} \\ \cos \gamma = \dfrac{\frac{1}{2} R'_z}{\sqrt{R}} \end{cases}$$

En résumé, à un point M de coordonnées x, y, z, et à une droite OD de directions α, β, γ, se rattachent les deux fonctions R et Γ réciproques l'une de l'autre. La fonction R a pour expression développée :

$$\text{(I)} \qquad R = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu;$$

le discriminant de cette fonction est le déterminant :

$$T = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\lambda \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

que nous avons désigné sous le nom de sinus du trièdre des axes, et qui admet comme déterminant réciproque, et moyennant les notations indiquées plus haut :

$$T_r = \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M \\ N & \sin^2\mu & \Lambda \\ M & \Lambda & \sin^2\nu \end{vmatrix} = T^2.$$

En vertu de l'une de nos identités fondamentales, la fonction R peut être écrite sous forme de déterminant comme il suit :

$$\text{(I')} \qquad R = -\frac{1}{T}\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}$$

Quant à la fonction réciproque Γ, elle est définie par l'une ou l'autre des égalités :

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} \Gamma = {} & \sin^2\lambda\cos^2\alpha + 2\Lambda\cos\beta\cos\gamma \\ & + \sin^2\mu\cos^2\beta + 2M\cos\nu\cos\alpha \\ & + \sin^2\nu\cos^2\nu + 2N\cos\alpha\cos\beta, \end{aligned}$$

en posant pour abréger :

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \Lambda = \cos\mu\cos\gamma - \cos\lambda \\ M = \cos\nu\cos\lambda - \cos\mu \\ N = \cos\lambda\cos\mu - \cos\nu \end{cases}$$

ou :

$$\text{(II')} \qquad \Gamma = -\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}$$

La fonction R est liée à la distance $OM = \rho$ du point M à l'origine par la relation :

$$R = \rho^2;$$

Quant à la fonction Γ, elle a une valeur constante, ainsi que l'exprime la relation :

$$\Gamma = T \tag{11}$$

établie plus haut.

Si maintenant nous considérons des systèmes formés par plusieurs directions ou par plusieurs points, tous les éléments géométriques se rattachant à ces systèmes pourront s'exprimer, comme nous allons le montrer, à l'aide de ces deux fonctions R et Γ.

Considérons en effet trois directions différentes $(\cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\gamma_1)$, $(\cos\alpha_2 \cos\beta_2 \cos\gamma_2)$, $(\cos\alpha_3 \cos\beta_3 \cos\gamma_3)$, auxquelles correspondent, avec nos notations, les trois fonctions Γ_{11}, Γ_{22}, Γ_{33}, satisfaisant aux trois conditions :

$$\begin{cases} \Gamma_{11} = T \\ \Gamma_{22} = T \\ \Gamma_{33} = T \end{cases} \tag{17}$$

Formons le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}; \tag{III}$$

toutes les propriétés du système de deux ou trois directions seront exprimables par ce déterminant ou par les mineurs de divers ordres et de diverses natures de ce déterminant.

Considérons de même trois points différents $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$, auxquels correspondent les trois fonctions R_{11}, R_{22}, R_{33}. Le déterminant fonctionnel :

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} & R_{33} \end{vmatrix}, \tag{IV}$$

ainsi que ses mineurs de divers ordres et de diverses natures, exprimeront toutes les propriétés géométriques de ces systèmes.

C'est ce que nous allons établir rapidement.

II. — COUPLE DE DEUX DIRECTIONS.

Soient deux directions OD_1, OD_2 définies par les angles $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$. Elles forment un angle V qu'il s'agit d'exprimer en fonction des angles $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$.

Prenons pour cela sur OD_1 un point M de coordonnées $(x, y, z$ et $\rho)$, et projetons le contour de ces coordonnées successivement sur OX, OY, OZ et OD_2 ; nous aurons :

$$\begin{cases} x + y\cos\nu + z\cos\mu - \rho\cos\alpha_1 = 0 \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda - \rho\cos\beta_1 = 0 \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z - \rho\cos\gamma_1 = 0 \\ x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - \rho\cos V = 0, \end{cases}$$

d'où en éliminant x, y, z et ρ :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha_1 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta_1 \\ \cos\mu & \cos\gamma & 1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & \cos V \end{vmatrix} = 0,$$

On tire de là :

$$(19) \qquad T\cos V = -\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha_1 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta_1 \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & 0 \end{vmatrix},$$

ou en tenant compte d'une de nos identités :

$$(19') \qquad T\cos V = \Gamma_{12}.$$

Comme, d'autre part, on a d'après les formules (18) :

$$\Gamma_{11} = T$$
$$\Gamma_{22} = T,$$

on voit que la valeur de cos V peut s'écrire soit sous la forme :

$$(20) \qquad \cos V = \frac{\Gamma_{12}}{T}.$$

soit sous la forme symétrique :

$$(21) \qquad \cos V = \frac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}\,\Gamma_{22}}}.$$

Calcul de sin V. — On a :

$$\sin^2 V = \begin{vmatrix} 1 & \cos V \\ \cos V & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}\,\Gamma_{22}}} \\ \dfrac{\Gamma_{21}}{\sqrt{\Gamma_{11}\,\Gamma_{12}}} & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplions la première ligne et la première colonne par $\sqrt{\Gamma_{11}}$, la deuxième ligne et la deuxième colonne pour $\sqrt{\Gamma_{22}}$, s'il vient après division hors barres :

$$\sin^2 V = \frac{1}{\Gamma_{11}\,\Gamma_{22}} \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix},$$

d'où :

$$\sin V = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{11}\,\Gamma_{22}}} = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{T}. \tag{22}$$

Applications. — 1° *Expressions des dièdres du trièdre des axes de coordonnées en fonctions de ses faces.* — Menons par l'origine des perpendiculaires aux plans coordonnés du même côté que la troisième arête, et désignons par X, Y, Z les dièdres des plans coordonnés ayant pour arêtes respectives les axes OX, OY, OZ. L'angle plan du dièdre d'arête OX a pour supplément l'angle formé par les perpendiculaires aux plans coordonnés se coupant suivant l'axe OX. Or ces droites font respectivement avec les axes les angles :

$$\frac{\pi}{2}, \quad m, \quad \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad n.$$

Par conséquent, la formule (19), jointe à la remarque précédente, nous donne :

$$T \cos X = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & 0 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos m \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n & 0 \end{vmatrix}$$

ou

$$T \cos X = - \Lambda \cos m \cos n.$$

En remplaçant $\cos m$ et $\cos n$ par leurs valeurs (14) trouvées plus haut, il vient :

$$\cos X = - \frac{\Lambda}{\sin \mu \sin \nu};$$

d'où la suite :

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos X &= - \frac{\Lambda}{\sin \mu \sin \nu}, \\ \cos Y &= - \frac{M}{\sin \nu \sin \lambda}, \\ \cos Z &= - \frac{N}{\sin \lambda \sin \mu}. \end{aligned} \right.$$

On pourrait calculer $\sin X$ par l'application de la formule (22) ; mais on a plus simplement :

$$\begin{aligned} \sin^2 X &= 1 - \frac{\Lambda^2}{\sin^2 \mu \sin^2 \nu}, \\ &= \frac{\sin^2 \mu \sin^2 \nu - \Lambda^2}{\sin^2 \mu \sin^2 \nu}, \\ &= \frac{T}{\sin^2 \mu \sin^2 \nu}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\sin X = \frac{\sqrt{T}}{\sin \mu \sin \nu},$$

et par suite :

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sin X &= \frac{\sqrt{T}}{\sin \mu \sin \nu}, \\ \sin Y &= \frac{\sqrt{T}}{\sin \nu \sin \lambda}, \\ \sin Z &= \frac{\sqrt{T}}{\sin \lambda \sin \mu}. \end{aligned} \right.$$

On déduit aisément de ces formules les suivantes :

$$(25) \qquad \frac{\sin X}{\sin \lambda} = \frac{\sin Y}{\sin \mu} = \frac{\sin Z}{\sin \nu} = \frac{\sqrt{T}}{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu}.$$

Les formules (24) et (25) se traduisent par les énoncés suivants, qui appartiennent à la trigonométrie sphérique.

1° *Dans tout trièdre, le produit des sinus de deux faces par le sinus du dièdre compris est constant.*

2° *Dans tout trièdre, le rapport du sinus d'un dièdre au sinus de la face opposée est constant.*

Les formules (23) sont d'ailleurs elles aussi les formules de trigonométrie sphérique exprimant les relations qui existent entre les trois faces et un dièdre.

2° *Expressions des faces, des dièdres et du sinus du trièdre supplémentaire du trièdre des axes de coordonnées.* — Désignons par λ' μ' ν' les faces, par X' Y' Z' les dièdres et par T' le sinus de ce nouveau trièdre. On sait que ses faces et ses dièdres sont les suppléments respectifs des dièdres et des faces du premier.

Il en résulte en particulier :

$$(26)\qquad \begin{cases} \cos\lambda' = -\cos X = \dfrac{\Lambda}{\sin\mu\sin\nu} \\ \cos\mu' = -\cos Y = \dfrac{M}{\sin\nu\sin\lambda} \\ \cos\nu' = -\cos Z = \dfrac{N}{\sin\lambda\sin\mu}. \end{cases}$$

En transportant ces valeurs de $\cos\lambda'$ $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ dans l'expression :

$$T' = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu' & \cos\mu' \\ \cos\nu' & 1 & \cos\lambda' \\ \cos\mu' & \cos\lambda' & 1 \end{vmatrix}$$

du sinus du second trièdre, il vient :

$$T' = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{N}{\sin\lambda\sin\mu} & \dfrac{M}{\sin\nu\sin\lambda} \\ \dfrac{N}{\sin\lambda\sin\mu} & 1 & \dfrac{\Lambda}{\sin\mu\sin\nu} \\ \dfrac{M}{\sin\nu\sin\lambda} & \dfrac{\Lambda}{\sin\mu\sin\nu} & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplions la première ligne et la première colonne par $\sin\lambda$, la deuxième ligne et la deuxième colonne par $\sin\mu$, la troisième ligne

et la troisième colonne par sin ν en ayant soin de diviser hors barres, il vient :

$$T' = \frac{1}{\sin^2\lambda \sin^2\mu \sin^2\nu} \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M \\ N & \sin^2\mu & \Lambda \\ M & \Lambda & \sin^2\nu \end{vmatrix},$$

ou plus simplement :

$$(27) \qquad T' = \frac{T^2}{\sin^2\lambda \sin^2\mu \sin^2\nu}.$$

III. — SYSTÈME DE TROIS DIRECTIONS FORMANT UN TRIÈDRE

Menons par l'origine trois droites OD_1, OD_2, OD_3, dont les directions sont définies par les angles $(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)$, $(\alpha_3\ \beta_2\ \gamma_2)$, $(\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3)$. Il s'agit d'exprimer en fonction de ces angles :

1° Les faces du trièdre formé par ces trois droites;

2° Les dièdres de ce trièdre ;

3° Son sinus.

Nous désignerons ces dièdres par A, B, C, en appelant A celui qui a pour arête la droite OD_1, ou simplement la droite 1, et ainsi de suite. Nous désignerons par suite les faces opposées à ces dièdres respectivement par a, b, c ; l'angle a étant formé par les droites 2 et 3, nous poserons :

$$a = (2,3)$$

et ainsi des autres.

1° *Faces du trièdre.* — Ces faces n'étant autres que les angles formés par deux droites, les formules (20) et (21) nous donnent immédiatement par disposition convenable des indices :

$$(27) \qquad \begin{cases} \cos a = \cos(2, 3) = \dfrac{\Gamma_{23}}{T} = \dfrac{\Gamma_{23}}{\sqrt{\Gamma_{22}\Gamma_{33}}}, \\ \cos b = \cos(3, 1) = \dfrac{\Gamma_{31}}{T} = \dfrac{\Gamma_{31}}{\sqrt{\Gamma_{33}\Gamma_{11}}}, \\ \cos c = \cos(1, 2) = \dfrac{\Gamma_{12}}{T} = \dfrac{\Gamma_{12}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}. \end{cases}$$

Nous avons aussi par applications de la formule (22) :

$$(28)\quad \begin{cases} \sin a = \sin(2, 3) = \dfrac{\begin{vmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{22}\Gamma_{33}}}, \\[2ex] \sin b = \sin(3, 1) = \dfrac{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{33}\Gamma_{11}}}, \\[2ex] \sin c = \sin(1, 2) = \dfrac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}. \end{cases}$$

2° *Dièdres du trièdre.* — Les formules (23), qui expriment les cosinus des dièdres du trièdre des axes de cordonnées en fonctions de ses faces, sont naturellement générales. En les appliquant au trièdre formé par les trois droites considérées, et en tenant compte des valeurs de A, M, N, on a :

$$\cos A = -\frac{\cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos c \\ \cos b & \cos a \end{vmatrix}}{\sin b \sin c}.$$

Par l'application des formules (27), qui fournissent les valeurs de $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, on a successivement :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c \\ \cos b & \cos a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\Gamma_{12}}{T} \\ \frac{\Gamma_{31}}{T} & \frac{\Gamma_{23}}{T} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{T^2}\begin{vmatrix} T & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{T^2}\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} \end{vmatrix}$$

D'autre part, par application des formules (28), qui fournissent les valeurs $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, on a :

$$\sin b \cdot \sin c = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Gamma_{33}\ \Gamma_{11}} \times \sqrt{\Gamma_{11}\ \Gamma_{22}}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{T^2}$$

Il en résulte finalement par division :

$$\cos A = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}$$

d'où la série :

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos A &= \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \\ \cos B &= \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \\ \cos C &= \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{23} & \Gamma_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right.$$

Pour calculer les sinus des mêmes angles, nous écrirons :

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$= 1 - \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}}$$

ou

$$\sin^2 A = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}}$$

En vertu des relations qui existent entre les déterminants mineurs du déterminant réciproque d'un déterminant, cette expression de $\sin^2 A$ peut s'écrire :

$$\sin^2 A = \Gamma_{11} \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}}$$

Il en résulte la série :

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin A &= \sqrt{\Gamma_{11}} \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \\ \sin B &= \sqrt{\Gamma_{22}} \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \\ \sin C &= \sqrt{\Gamma_{33}} \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{31} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{1}}{\begin{vmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \Gamma_{33} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right.$$

3° *Sinus du trièdre des trois droites.* — Désignons ce sinus par Θ ; nous devons :

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

En remplaçant $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ par leurs valeurs (27), il vient :

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\Gamma_{12}}{T} & \frac{\Gamma_{31}}{T} \\ \frac{\Gamma_{12}}{T} & 1 & \frac{\Gamma_{23}}{T} \\ \frac{\Gamma_{31}}{T} & \frac{\Gamma_{23}}{T} & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplions par $\sqrt{T}$ la première ligne et la première colonne, la deuxième ligne et la deuxième colonne, la troisième ligne et la troisième colonne, et divisons hors barres, il vient :

$$\Theta = \frac{1}{T^3}\begin{vmatrix} T & \Gamma_{12} & \Gamma_{31} \\ \Gamma_{12} & T & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & T \end{vmatrix},$$

ou encore :

$$\Theta = \frac{1}{T^3}\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}, \tag{31}$$

ou enfin :

$$\Theta = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}}{\Gamma_{11}\ \Gamma_{22}\ \Gamma_{33}} \tag{31'}$$

Les identités fondamentales établies antérieurement [1] sont applicables à toutes les égalités que nous venons d'obtenir pour en obtenir la transformation et le développement. Nous nous contenterons de faire usage de l'identité qui s'applique à la dernière formule trouvée (31), ce qui nous donne :

$$\Theta = \frac{1}{T^3}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 \times \begin{vmatrix} \sin^2\gamma & N & M \\ N & \sin^2\mu & V \\ M & V & \sin^2\nu \end{vmatrix}$$

ou

$$\Theta = \frac{1}{T^3}\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 \times T^2,$$

On tire de là la relation simple :

$$T\ \Theta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}^2 \tag{32}$$

[1] Voir *Bulletin de la Société Philomathique*, numéro déjà cité.

qui se traduit par l'énoncé suivant : *Le produit des sinus de deux trièdres est toujours un carré.*

Application. — *Expression du sinus du trièdre supplémentaire du trièdre des axes de coordonnées.* — Désignons, comme nous l'avons déjà fait, par T′ le sinus de ce trièdre. En tenant compte des valeurs actuelles des cosinus, la formule précédente (32) se réduit à :

$$TT' = \begin{vmatrix} \cos l & 0 & 0 \\ 0 & \cos m & 0 \\ 0 & 0 & \cos n \end{vmatrix}^2$$

ou :

$$TT' = \cos^2 l \cos^2 m \cos^2 n \tag{33}$$

En remplaçant $\cos l$, $\cos n$ et $\cos m$ par leurs valeurs (12), il vient finalement

$$T' = \frac{T^2}{\sin^2\lambda \sin^2\mu \sin^2\nu}, \tag{34}$$

résultat déjà obtenu par une autre méthode.

IV. — COUPLE DE DEUX POINTS

Soient M_1 et M_2 deux points de coordonnées $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$. Il s'agit d'exprimer en fonctions de celles-ci :

1° Les distances des deux points à l'origine ;
2° Leur distance mutuelle ;
3° L'angle des rayons vecteurs OM_1, OM_2 ;
4° L'aire du triangle $OM_1 M_2$;
5° La distance de l'origine à la droite M_1M_2 ;
6° Les cosinus directeurs de l'axe du plan OM_1M_2.

1° *Distances des points à l'origine.* — Conformément à notre notation ces distances ρ_1 et ρ_2 sont fournies par les formules :

$$\begin{cases} \rho_1^2 = R_{11} \\ \rho_2^2 = R_{22}. \end{cases} \tag{35}$$

2° *Distance mutuelle des deux points.* — La longueur l de cette distance s'obtient en transportant l'origine au point (x_1, y_1, z_1), c'est

à-dire en remplaçant dans la fonction R les coordonnées x, y, z respectivement par $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, ce qui nous donne :

$$l^2 = R_{11} + R_{22} - R_{12}$$

D'après les remarques faites dans la démonstration de nos identités fondamentales, cette valeur peut se mettre sous forme de déterminant de la manière suivante :

$$(37) \qquad l^2 = \frac{1}{T} \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ou symboliquement :

$$(37') \qquad l^2 = \frac{1}{T} \left| \frac{T_r}{012} \right| 012 \Big|$$

3° *Expression de l'angle* M_1OM_2. — Désignons cet angle par V, la géométrie nous donne :

$$l^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos V,$$

ou en tenant compte des résultats déjà obtenus :

$$R_{11} + R_{22} - 2R_{12} = R_{11} + R_{22} - 2\cos V \sqrt{R_{11} R_{22}}$$

On tire de là :

$$(38) \qquad \cos V = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sin^2 V &= 1 - \cos^2 V \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cos V \\ \cos V & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}} \\ \dfrac{R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}} & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

et à l'aide de transformations déjà employées :

$$\sin^2 V = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12} & R_{22} \end{vmatrix}}{R_{11}\ R_{22}},$$

et finalement :

$$\sin V = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{11}\ R_{22}}} \tag{39}$$

4° *Aire du triangle* OM_1. — On a, en désignant cette aire par S :

$$\begin{aligned} 2S &= \rho_1\rho_2 \sin V \\ &= \sin V \sqrt{R_{11}\ R_{22}}, \end{aligned}$$

d'où à l'aide de la formule (39) :

$$2S = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \tag{40}$$

5° *Distance de l'origine à la droite* M_1M_2. — L'expression de cette distance h est fournie par la relation :

$$lh = 2S,$$

où il n'y a plus qu'à faire les substitutions voulues.

6° *Cosinus directeurs de l'axe du plan* OM_1M_2. — Désignons par ξ, η, ζ, les angles que l'axe du plan OM_1M_2 fait avec les axes de coordonnées ; désignons en même temps par S_x, S_y, S_z les projections obliques sur les plans coordonnés de l'aire S.

On a :

$$\left\{ \begin{aligned} 2\ S_x &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \sin \lambda \\ 2\ S_y &= \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \sin \mu \\ 2\ S_z &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin \nu. \end{aligned} \right. \tag{41}$$

Projetons d'autre part sur un plan perpendiculaire à OX l'aire S et sa projection oblique S_x ; il est facile de voir que ces deux projections sont égales, d'où par conséquent :

$$S \cos \xi = S_x \cos l$$

En remplaçant S_x par sa valeur qui vient d'être écrite et cos l par la valeur fournie par la formule (14), on a la valeur de cos ξ. On a ainsi la série :

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos \xi &= \frac{S_x \cos l}{S} \\ \cos \eta &= \frac{S_y \cos m}{S} \\ \cos \zeta &= \frac{S_z \cos n}{S}. \end{aligned} \right.$$

V. — SYSTÈME DE TROIS POINTS FORMANT UN TRIANGLE

Considérons trois points M_1, M_2, M_3, de coordonnées $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$. Il s'agit d'exprimer en fonction de ces données les éléments qui se rattachent à ce système, savoir :

1° Les distances des points à l'origine ou rayons vecteurs de ces points ;
2° Les distances mutuelles des points donnés ou longueurs des côtés du triangle ;
3° Les angles que font entre eux les rayons vecteurs ;
4° Les angles du triangle $M_1M_2M_3$;
5° Les aires des triangles OM_2M_3, OM_3M_1, OM_1M_2 ;
6° L'aire du triangle $M_1M_2M_3$;
7° Les dièdres du trièdre $OM_1M_2M_3$;
8° Le sinus de ce trièdre ;
9° Le volume du tétraèdre $OM_1M_2M_3$;
10° La distance de l'origine au plan $M_1M_2M_3$;
11° Les cosinus directeurs de l'axe de ce plan.

Un certain nombre de ces éléments figurent déjà dans le paragraphe précédent. Nous en ferons le simple rappel en introduisant les indices convenables, pour nous occuper plus spécialement des éléments nouveaux.

4° *Distances à l'origine ou rayons vecteurs des points donnés.* — On a :

$$(43)\qquad \begin{cases} \rho_1^2 = R_{11} \\ \rho_2^2 = R_{22} \\ \rho_3^2 = R_{33}, \end{cases}$$

2° *Distances mutuelles des points ou longueurs des côtés du triangle* $M_1M_2M_3$. — On a symboliquement :

$$(44)\qquad \begin{cases} l_{23}^2 = \dfrac{1}{T}\left|\dfrac{T_r}{023}\right|^{023} \\ l_{31}^2 = \dfrac{1}{T}\left|\dfrac{T_r}{031}\right|^{031} \\ l_{12}^2 = \dfrac{1}{T}\left|\dfrac{T_r}{012}\right|^{012}. \end{cases}$$

3° *Angles des rayons vecteurs.* — Désignons par a, b, c, ces angles qui sont les faces du trièdre $OM_1M_2M_3$, et appliquons la formule (38) ; nous avons :

$$(45)\qquad \begin{cases} \cos a = \cos(2, 3) = \dfrac{R_{23}}{\sqrt{R_{22}\,R_{33}}} \\ \cos b = \cos(3, 1) = \dfrac{R_{31}}{\sqrt{R_{33}\,R_{11}}} \\ \cos c = \cos(1, 2) = \dfrac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}\,R_{22}}}. \end{cases}$$

Nous pouvons exprimer les mêmes angles par leurs sinus, et alors l'application de la formule (39) nous donne :

$$(46)\qquad \begin{cases} \sin a = \sin(2, 3) = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{22}\,R_{33}}} \\ \sin b = \sin(3, 1) = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{33}\,R_{11}}} \\ \sin c = \sin(1, 2) = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{11}\,R_{22}}}. \end{cases}$$

4° *Angles du triangle* $M_1M_2M_3$. — Proposons-nous d'abord d'évaluer l'angle M_1 de ce triangle. Nous transporterons pour cela l'origine au point M_1 ; il nous suffira alors d'appliquer la première des formules (45) et aussi des formules (46), à la condition d'y remplacer $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ respectivement par $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, $(x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1)$. Pour trouver la forme particulière que prennent les formules ainsi modifiées, nous devrons remplacer les seconds membres par leurs expressions sous forme de déterminants, telles qu'elles résultent de nos identités fondamentales, et faire dans ces déterminants les substitutions indiquées. Il vient ainsi :

$$\cos M_1 = \frac{-\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_2 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_2 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_2 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_2 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_2 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_3 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_3 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix}}}$$

$$\sin M_1 = \frac{T\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_2 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_2 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_2 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & x_3 - x_1 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & y_3 - y_1 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix}}}$$

Or les déterminants symétriques à une seule rangée de variables qui figurent dans ces formules sont susceptibles d'être transformés en d'autres déterminants d'ordre plus élevé, mais homogènes par rapport aux coordonnées, en vertu d'une remarque faite dans la démonstration de nos identités fondamentales. Cette même remarque s'applique au déterminant non symétrique qui figure dans le numérateur de la valeur de cos M_1 et aussi au déterminant à deux rangées de variables qui figure au numérateur de sin M_1. Cela nous permet d'écrire les formules précédentes sous la forme :

$$\cos M_1 = \frac{\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_3 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_3 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin M_1 = \frac{\sqrt{-T \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}}{\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 & x_1 & x_2 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 & y_1 & y_2 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}$$

En faisant usage des formes symboliques que nous avons indiquées, nous écrirons les formules précédentes et les formules analogues de la manière suivante :

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos M_1 &= \frac{\left| \dfrac{T_r}{013} \right| 012}{\left| \dfrac{T_r}{012} \right| 012 \Big|^{\frac{1}{2}} \times \left| \dfrac{T_r}{013} \right| 013 \Big|^{\frac{1}{2}}} \\ \cos M_2 &= \frac{\left| \dfrac{T_r}{021} \right| 023}{\left| \dfrac{T_r}{023} \right| 023 \Big|^{\frac{1}{2}} \times \left| \dfrac{T_r}{021} \right| 021 \Big|^{\frac{1}{2}}} \\ \cos M_3 &= \frac{\left| \dfrac{T_r}{032} \right| 031}{\left| \dfrac{T_r}{013} \right| 031 \Big|^{\frac{1}{2}} \times \left| \dfrac{T_r}{032} \right| 032 \Big|^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right.$$

$$(48)\quad \begin{cases} \sin M_1 = \dfrac{\sqrt{-T\left|\dfrac{T_r}{0123}\right|^{0123}}}{\left|\dfrac{T_r}{012}\right|^{012}{}^{\frac{1}{2}} \times \left|\dfrac{T_r}{013}\right|^{013}{}^{\frac{1}{2}}} \\[2ex] \sin M_2 = \dfrac{\sqrt{-T\left|\dfrac{T_r}{0123}\right|^{0123}}}{\left|\dfrac{T_r}{023}\right|^{023}{}^{\frac{1}{2}} \times \left|\dfrac{T_r}{021}\right|^{021}{}^{\frac{1}{2}}} \\[2ex] \sin M_3 = \dfrac{\sqrt{-T\left|\dfrac{T_r}{0123}\right|^{0123}}}{\left|\dfrac{T_r}{031}\right|^{031}{}^{\frac{1}{2}} \times \left|\dfrac{T_r}{032}\right|^{032}{}^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

5° *Aires des triangles* OM_2M_3, OM_3M_1, OM_1M_2. — Désignons ces aires par s_{23}, s_{31}, s_{12}; nous aurons par applications de la formule (40) du paragraphe précédent :

$$(49)\quad \begin{cases} 2\,s_{23} = \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \\[2ex] 2\,s_{31} = \begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \\[2ex] 2\,s_{12} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

6° *Aire du triangle* $M_1M_2M_3$. — L'expression de cette aire S est fournie par la formule :

$$2\,S = l_{12}\,l_{13}\sin M_1.$$

En remplaçant l_{12}, l_{13} et $\sin M_1$ par leurs valeurs fournies par les formules (44) et (48), il vient, toutes réductions faites :

$$(50)\qquad 2S = \sqrt{-\left|\frac{T_r}{0123}\right|^{0123}}.$$

7° *Dièdres du trièdre* $OM_1M_2M_3$. — Désignons ces dièdres par A, B, C, ou encore par (1), (2), (3). Pour les calculer, nous remarque-

rons que les formules (23) applicables, comme nous l'avons dit, à des trièdres quelconques, nous donnent ici :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

ou

$$\cos A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos c \\ \cos b & \cos a \end{vmatrix}}{\sin b \sin c}.$$

En remplaçant les éléments contenus dans cette formule par leurs valeurs (45) et (46), il vient :

$$\cos A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}} \\ \dfrac{R_{31}}{\sqrt{R_{33} R_{11}}} & \dfrac{R_{32}}{\sqrt{R_{33} R_{22}}} \end{vmatrix}}{\dfrac{\begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{R_{11} \sqrt{R_{22} R_{33}}}}$$

Multiplions la première ligne et la première colonne du numérateur par $\sqrt{R_{11}}$, la deuxième colonne par $\sqrt{R_{22}}$, et la deuxième ligne par $\sqrt{R_{33}}$ en ayant soin de hors trois barres par les mêmes facteurs, il vient, toutes réductions faites :

$$\cos A = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{31} & R_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}$$

Le même procédé de calcul appliqué aux deux autres cosinus nous donne la série de formules :

$$(51)\quad \begin{cases} \cos A = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{31} & R_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \\[2ex] \cos B = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{12} & R_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{13} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \\[2ex] \cos C = \dfrac{\begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{23} & R_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

Du calcul des cosinus on déduit le calcul des sinus. En procédant comme nous avons fait dans la question analogue traitée au cours du paragraphe III, nous avons, pour exprimer sin A, sin B, sin C, les formules suivantes :

$$(52)\quad \begin{cases} \sin A = \sqrt{R_{11}}\, \dfrac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \\[2ex] \sin B = \sqrt{R_{22}}\, \dfrac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \\[2ex] \sin C = \sqrt{R_{33}}\, \dfrac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ H_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{33} & R_{31} \\ R_{13} & R_{11} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$$

8° *Sinus du trièdre* $OM_1M_2M_3$. — Désignons ce sinus par Θ; il a pour expression en fonction de ses faces :

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}.$$

En remplaçant dans cette formule cos a, cos b, cos c, par leur valeur (45) et en dirigeant le calcul comme nous avons déjà fait, il vient :

$$(53) \qquad \Theta = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{R_{11}\ R_{22}\ R_{23}}$$

En appliquant au numérateur celle des identités fondamentales qui lui est applicable, il vient :

$$(53') \qquad \Theta = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 \times \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}}{R_{11}\ R_{22}\ R_{23}},$$

d'où la relation simple :

$$(54) \qquad \frac{\Theta}{T} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2}{\rho_1^2\ \rho_2^2\ \rho_3^2},$$

qui se traduit par l'énoncé suivant : *Le quotient des sinus de deux trièdres quelconques est toujours un carré.*

9° *Volume du tétraèdre* $OM_1M_2M_3$. — En prenant pour axes de coordonnées les droites OM_1, OM_2, OM_3, et en appliquant la formule (15), il vient :

$$6\,V = \rho_1\ \rho_2\ \rho_3\ \sqrt{\Theta},$$

d'où, en remplaçant Θ par sa valeur (53) :

$$(55) \qquad 6\,V = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

ou encore :

$$(55') \qquad 6\,V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \sqrt{T}.$$

10° *Distance de l'origine au plan* $M_1M_2M_3$. — Cette distance δ est fournie par la formule :

$$6\,V = 2\,S\delta \tag{56}$$

dans laquelle il n'y a plus qu'à faire les substitutions nécessaires.

11° *Cosinus directeurs de l'axe du plan* $M_1M_2M_3$. — Désignons par S_x, S_y, S_z les projections obliques sur les plans coordonnés de l'aire S, et par X, Y, Z, les déterminants obtenus en supprimant dans le tableau :

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{Vmatrix}$$

les première, deuxième et troisième colonnes. En remarquant que

$$2\,S_x = X \sin \lambda,$$

et en procédant exactement comme dans le cas du système de deux points, nous avons :

$$\left\{\begin{aligned} \cos \xi &= \frac{X\sqrt{T}}{2S} \\ \cos \mu &= \frac{Y\sqrt{T}}{2S} \\ \cos \zeta &= \frac{Z\sqrt{T}}{2S}. \end{aligned}\right. \tag{55}$$

VI. — SYSTÈME DE QUATRE POINTS FORMANT UN TÉTRAÈDRE

Considérons maintenant quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, de cordonnées $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$, $(x_4y_4z_4)$. Nous avons à exprimer, à l'aide de ces coordonnées ou en fonction de ces coordonnées, les éléments suivants qui caractérisent le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$, savoir :

1° Les arêtes du tétraèdre ;
2° Les faces (angles) du tétraèdre ;
3° Les aires des faces du tétraèdre ;
4° Les angles dièdres ;
5° Les sinus de ses divers trièdres ;
6° Son volume ;
7° Ses hauteurs.

1° *Arêtes du tétraèdre.* — Soit l_{pq}, la longueur de l'arête joignant deux sommets p et q. Nous avons immédiatement par ce qui précède :

$$l^2_{pq} = \frac{1}{T}\left|\frac{T_r \mid opq}{opq}\right|. \tag{56}$$

2° *Faces (angles) du tétraèdre.* — Soit p, q, r les numéros d'ordre de trois sommets du tétraèdre pris dans leur ordre de permutation. Considérons dans cette face l'angle de sommet p ; les formules (47) et (48) nous donnent :

$$\cos M_p = \frac{\left|\frac{T_r \mid opq}{opr}\right|}{\left|\frac{T_r \mid opq}{opq}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r \mid opr}{opr}\right|^{\frac{1}{2}}} \tag{57}$$

$$\sin Mp = \frac{\sqrt{-T\left|\frac{T_r \mid opqr}{opqr}\right|}}{\left|\frac{T_r \mid opq}{opq}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r \mid opr}{opr}\right|^{\frac{1}{2}}}. \tag{58}$$

3° *Aires des faces du tétraèdre.* — Considérons la face $M_pM_qM_r$; elle a pour expression :

$$2S = \sqrt{-\left|\frac{T_r \mid opqr}{opqr}\right|}, \tag{59}$$

la lettre S devant être affectée de l'indice ne figurant pas dans le groupe p, q, r.

4° *Dièdres du tétraèdre.* — Considérons en particulier le dièdre d'arête M_1M_2 ; il a pour arête le côté l_{12} et pour faces les triangles d'aires S_3, S_4. Pour trouver l'expression de ce dièdre, il suffit de transporter l'origine en M_1 et d'appliquer les formules (51) et (52) en remplaçant les coordonnées $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$, respectivement par $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, $(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$, dans les développements des déterminants qui figurent dans ces expressions. On aura ainsi, en faisant usage de nos formes symboliques :

$$(60)\qquad \cos(M_1M_2) = \frac{\left|\dfrac{T_r}{0124}\,\Big|\,0123\right|}{\left|\dfrac{T_r}{0123}\,\Big|\,0123\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\dfrac{T_r}{0124}\,\Big|\,0124\right|^{\frac{1}{2}}}$$

$$(61)\qquad \sin(M_1M_2) \times \frac{\left|\dfrac{T_r}{012}\,\Big|\,012\right|^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \sqrt{T}}{\sqrt{\left|\dfrac{T_r}{0123}\,\Big|\,0123\right| \times \left|\dfrac{T_r}{0124}\,\Big|\,0124\right|}}$$

Les formules relatives aux autres dièdres se déduisent facilement de celles-ci par permutation.

5° *Sinus des trièdres des tétraèdres.* — Considérons par exemple le trièdre de sommet M_1 que nous désignerons par Θ_1. Transportons encore l'origine en M_1, et appliquons la formule (53), dans laquelle nous ferons les substitutions précédemment indiquées; nous aurons sous forme symbolique,

$$(62)\qquad \Theta_1 = \frac{T^4 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}^2}{\left|\dfrac{T_r}{012}\,\Big|\,012\right| \times \left|\dfrac{T_r}{013}\,\Big|\,013\right| \times \left|\dfrac{T_r}{014}\,\Big|\,014\right|}$$

Les sinus des trois autres trièdres se déduisent aisément de celui-ci.

6° *Volume du tétraèdre.* — On transporte encore l'origine au sommet M_1, et en appliquant de la même manière la formule (55) ou (55'), il vient :

$$(63)\qquad 6\,V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \sqrt{T}.$$

7° *Hauteurs du tétraèdre.* — La hauteur h_p, issue du sommet M_p, se déduit immédiatement de la relation :

$$6\,V = 2\,S_p \times h_p, \tag{64}$$

où il suffit de faire les substitutions nécessaires

RÉSUMÉ

Pour terminer, nous allons réunir dans un tableau d'ensemble les principaux résultats obtenus dans l'étude des systèmes considérés. Nous ne ferons figurer dans ce tableau que les éléments caractéristiques des systèmes.

I. — DIRECTIONS

1° *Direction unique.* — Relations entre les cosinus directeurs :

$$T = \Gamma_{12} = -\left|\frac{T\,|\,1}{1}\right|.$$

2° *Couple de deux directions.* — Angle des deux directions :

$$T\cos(1,2) = \Gamma_{12} = -\left|\frac{T\,|\,1}{2}\right| \tag{I}$$

$$T\sin(1,2) = \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{T\,|\,12}{12}\right|^{\frac{1}{2}}. \tag{II}$$

3° *Système de trois directions.* — *a*) Dièdre d'arête (1) formé par les directions (1,2) et (1,3) :

$$\cos(1) = \frac{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32}\end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{13}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{33}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left|\frac{T\,|\,12}{13}\right|}{\left|\frac{T\,|\,12}{12}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T\,|\,13}{13}\right|^{\frac{1}{2}}} \tag{III}$$

$$\sin(1) = \frac{\sqrt{\Gamma_{11}}\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}}{\left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\begin{matrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{13}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{33}\end{matrix}\right|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\left|\frac{T\,|\,1}{1}\right| \times \left|\frac{T\,|\,123}{123}\right|}}{\left|\frac{T\,|\,12}{12}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T\,|\,13}{13}\right|^{\frac{1}{2}}}. \tag{IV}$$

b) Sinus du trièdre des trois directions :

$$\text{(V)}\quad \Theta = \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix} = \frac{T^2 \left| \frac{T \mid 123}{123} \right|}{\left| \frac{T \mid 1}{1} \right| \times \left| \frac{T \mid 2}{2} \right| \times \left| \frac{T \mid 3}{3} \right|}.$$

II. — POINTS

Eu égard à la nature des formules, il y a lieu de les partager en deux catégories, suivant qu'elles expriment les relations des points ou systèmes de points avec l'origine ou les relations des points entre eux.

Premier groupe : Relations avec l'origine. — 1° *Point unique.* — Distance à l'origine ou longueur du rayon vecteur :

$$\text{(VI)}\qquad \rho_1^2 = R_{11} = -\frac{1}{T} \left| \frac{T_r \mid 1}{1} \right|.$$

2° *Couple de deux points.* — *a*) Angle des deux rayons vecteurs :

$$\text{(VII)}\qquad \cos(1,2) = \frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}} = \frac{-\left| \frac{T_r \mid 1}{1} \right|}{\sqrt{\left| \frac{T_r \mid 1}{1} \right| \times \left| \frac{T_r \mid 2}{2} \right|}}.$$

$$\text{(VIII)}\qquad \sin(1,2) = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{R_{11} R_{22}}} = \frac{T \left| \frac{T_r \mid 12}{12} \right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left| \frac{T_r \mid 1}{1} \right| \times \left| \frac{T_r \mid 2}{2} \right|}}.$$

b) Aire du triangle OM_1M_2 :

$$\text{(IX)}\qquad 2\,S = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{T_r \mid 12}{12} \right|^{\frac{1}{2}},$$

3° *Système de trois points.* — *a*) Dièdre d'arête OM_1 dans le trièdre $OM_1M_2M_3$:

$$\text{(X)}\quad \cos(OM_1) = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{13} & R_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{11} & R_{13} \\ R_{31} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left|\frac{T_r}{13}\middle| 12\right|}{\left|\frac{T_r}{12}\middle| 12\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r}{13}\middle| 13\right|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{(XI)}\quad \sin(OM_1 = \frac{\sqrt{R_{11}}\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \times \begin{vmatrix} R_{11} & R_{13} \\ R_{31} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\left|\frac{T_r}{1}\middle| 1\right| \times \left|\frac{T_r}{123}\middle| 123\right|}}{\left|\frac{T_r}{12}\middle| 12\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r}{13}\middle| 13\right|^{\frac{1}{2}}}.$$

b) Sinus du trièdre $OM_1M_2M_3$:

$$\text{(XII)}\quad \Theta = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{R_{11}\ R_{22}\ R_{33}} = \frac{T_1 \left|\frac{T_r}{123}\middle| 123\right|}{\left|\frac{T_r}{1}\middle| 1\right| \times \left|\frac{T_r}{2}\middle| 2\right| \times \left|\frac{T_r}{3}\middle| 3\right|}$$

c) Volume du tétraèdre $OM_1M_2M_3$:

$$\text{(XIII)}\qquad 6\ V = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \left|\sqrt{-T\left|\frac{T_r}{123}\middle| 123\right|}\right|.$$

Deuxième groupe : Relations de points entre eux. — 1° *Couple de deux points.* — Distance des deux points :

$$\text{(XIV)}\qquad l^2 = \frac{1}{T}\left|\frac{T_r}{012}\middle| 012\right|.$$

2° *Système de trois points.* — *a*) Angle de sommet M_1 dans le triangle $M_1M_2M_3$:

$$\text{(XV)}\qquad \cos M_1 = \frac{\left|\frac{T_r}{013}\middle| 012\right|}{\left|\frac{T_r}{012}\middle| 012\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r}{013}\middle| 013\right|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{(XVI)} \qquad \sin M_1 = \frac{\sqrt{-T\left|\frac{T_r\,|\,0123}{0123}\right|}}{\left|\frac{T_r\,|\,012}{012}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r\,|\,013}{013}\right|^{\frac{1}{2}}}$$

b) Aire du triangle $M_1M_2M_3$:

$$\text{(XVII)} \quad 2S = \sqrt{-\left|\frac{T_r\,|\,0123}{0123}\right|}.$$

3° *Système de quatre points.* — *a*) Dièdre d'arête M_1M_2 dans le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$:

$$\text{(XVIII)} \qquad \cos(M_1M_2) = \frac{\left|\frac{T_r\,|\,0123}{0124}\right|}{\sqrt{\left|\frac{T_r\,|\,0123}{0123}\right| \times \left|\frac{T_r\,|\,0124}{0124}\right|}}$$

$$\text{(XIX)} \qquad \sin(M_1M_2) = \frac{\left|\frac{T_r\,|\,012}{012}\right|^{\frac{1}{2}} \times \left|\frac{T_r\,|\,01234}{01234}\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left|\frac{T_r\,|\,0123}{0123}\right| \times \left|\frac{T_r\,|\,0124}{0124}\right|}}$$

b) Sinus du trièdre de sommet M_1 dans le tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$:

$$\text{(XX)} \qquad \Theta_1 = \frac{\left|\frac{T_r\,|\,01234}{01234}\right|}{\left|\frac{T_r\,|\,012}{012}\right| \times \left|\frac{T_r\,|\,013}{013}\right| + \left|\frac{T_r\,|\,014}{014}\right|}.$$

c) Volume du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$:

$$\text{(XXI)} \qquad 6V = \left|\frac{T_r\,|\,01234}{01234}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

On peut remarquer qu'aucune des formules de ce second groupe ne renferme le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

pas plus qu'aucun de ses déterminants mineurs ou éléments. Dans ces formules, le noyau central primitif T_r, qui est un déterminant du troisième ordre, se trouve remplacé par un autre noyau obtenu en encadrant l'ancien de zéros, ainsi qu'il suit :

$$\begin{vmatrix} \sin^2\lambda & N & M & 0 \\ N & \sin^2\mu & \Lambda & 0 \\ M & \Lambda & \sin^2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ce nouveau noyau, qui joue le rôle d'un discriminant du quatrième ordre, peut être encadré de quatre lignes et de quatre colonnes de coordonnées, au lieu de trois comme le précédent. Cette circonstance analytique est l'indication que, abstraction faite du cas où l'on considère des directions envisagées comme simples directions, les coordonnées cartésiennes ne constituent pas le système naturel et logique de coordonnées. L'encadrement obligé par des zéros du noyau primitif est comme une invitation à employer et même à imaginer, s'il n'était pas déjà inventé, le système des coordonnées tétraédriques qui introduira une forme quadratique fondamentale à quatre variables et avec elle un discriminant-noyau du quatrième ordre susceptible d'être encadré de quatre lignes et de quatre colonnes de coordonnées et vraiment capable d'exprimer toutes les propriétés du tétraèdre.

Les études que nous venons de faire dans le plan et dans l'espace exigent donc des études complémentaires qui feront l'objet de mémoires ultérieurs.

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes intentionnellement abstenus de donner aucun développement aux formules obtenues. Ces développements ne sont utiles que dans le cas particulier des coordonnées rectangulaires pour obtenir les formes plus simples correspondantes. Dans tout autre cas, et même dans ce dernier cas, les formules synthétiques trouvées sont, au contraire, d'interprétation commode et, par le fait même de leur condensation, se prêtent, ainsi qu'on a pu s'en convaincre, parfaitement au calcul.

THÉORÈMES ET LOIS POUR LA DÉCOMPOSITION DE GRANDS NOMBRES EN DEUX FACTEURS [1] ;

Par Ernest LEBON.

Comme, dans ce travail, j'ai en vue la décomposition des grands nombres, je suppose connue la décomposition des nombres inférieurs à 9 millions, limite des Tables de facteurs premiers.

1. Je désigne sous le nom de *formes* Φ les polynômes entiers en x. La *classe I* comprend les formes

$$\Phi(\mathrm{I}) = x^{\alpha} \pm x^{\beta} \pm x^{\gamma} \pm \ldots\ldots \pm 1$$

dans lesquelles les exposants α, β, γ,..., décroissent, le terme de degré le plus élevé a le coefficient 1, les autres termes ont le coefficient ± 1, le terme indépendant de x est ± 1.

Les formes Φ (I) comprennent les formes Φ (I′) où tous les coefficients sont positifs, et les formes Φ (I″) où des coefficients sont positifs et d'autres négatifs.

Les formes Φ (I) sont dites *complètes* quand les exposants de x sont les entiers consécutifs de α à 0.

Une forme est dite *première* lorsqu'elle ne peut pas être décomposée en un produit de deux formes.

Il est facile d'écrire les formes Φ de la classe I pour les divers degrés de ces formes.

2. La signification des symboles employés pour représenter les formes a été expliquée dans le *Bulletin* (9e série, t. XI, 1908, p. 168-170).

3. Le nombre des formes du degré n de $(n\bar{0})$ à $(n\smile 0)$ inclus est donné par la formule

$$2{,}3^{n-1}.$$

Pour la classe I, j'ai vérifié que les rapports du nombre des formes

[1] Séance du 28 novembre 1908 de la Société Philomathique de Paris.

composées au nombre total des formes sont respectivement pour les degrés

3	4	5	6,
$\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$	$\frac{20}{54}=\frac{10}{27}>\frac{1}{3}$	$\frac{57}{162}=\frac{19}{54}>\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}>\frac{193}{486}>\frac{1}{3}$.

Ces rapports montrent qu'il y a intérêt à exprimer les grands nombres en formes pour chercher à les décomposer rapidement en deux facteurs.

4. Quand la base du système de numération est 2, la suite des formes Φ (I′) donne, de 1 à $(n\smile 0)$ compris, les nombres impairs ; la suite des formes Φ (I″) donne, de 1 à $(n\bar{0})$ inclus, les nombres impairs et plusieurs fois certains d'entre eux.

5. D'après cette remarque et d'après les valeurs des rapports précédents, il sera avantageux d'exprimer les nombres dans la base 2, lorsque l'on voudra les représenter par des formes pour chercher leur décomposition en facteurs.

6. Quand la base du système de numération est 3, la suite des formes Φ (I) donne de 1 à $(n\smile 0)$ inclus, les nombres non multiples de 3.

7. Quand la base du système de numération est 10, la suite des formes φ (I′) comprend les nombres représentés par des 1, ou par des 1 et des 0. Alors, peuvent aisément être écrits sous la forme Φ (I″) beaucoup de nombres dont le chiffre des unités simples est 1 ou 9, dont les autres chiffres sont des 0, des 1, des 8, des 9.

8. Lorsqu'une forme de la classe I est divisible par une forme de cette classe, on trouve souvent pour quotient une forme de la classe I. Si ce quotient contient au moins un terme dont le coefficient, en valeur absolue, est supérieur à 1, sa forme sera dite des classes II, III,..., selon que la valeur absolue du plus grand coefficient sera 2, 3,...

9. Quand une forme Φ est le produit de deux formes et que l'on exprime ce fait, on obtient une *identité* qui est vraie, quelle que soit la valeur de x. Cette identité constitue un *théorème*.

De telles identités, où les exposants et les coefficients sont numériques, peuvent conduire à des identités dans lesquelles tous les

exposants ou la plupart sont littéraux. J'appellerai *Lois* ces identités littérales [1].

J'ai obtenu beaucoup de lois très générales. Telle est la suivante :

$$(2m + 1 \;\overline{m + r}\,.\,\overline{m + 1}\;\; m \;\; \overline{m + 1 - \overset{\div r}{r}\smile 1}\;\; 0)$$
$$= (m + 1 - \overset{\div r}{\bar{r}}\smile 1\;\; \bar{0})\;\; (m + r\;\; \bar{m}\;\; \bar{0}) \qquad (m = kr),$$

où le signe : r indique que les termes sur lesquels il se trouve croissent en progression arithmétique de raison r, où m, doit être un multiple de r. Le premier membre est une forme de la classe I si $r > 1$.

10. Une Loi étant donnée, on peut, pour chaque valeur de l'exposant m, prendre pour valeur de la variable x un nombre quelconque : on obtient ainsi autant de nombres que l'on veut et leur décomposition en deux facteurs. Les Lois peuvent donc être avantageusement utilisées quand on cherche à décomposer en facteurs premiers une suite de grands nombres.

11. Si l'on avait beaucoup de Lois, convenablement classées, on pourrait, dans un grand nombre de cas, résoudre rapidement le problème consistant à décomposer en deux facteurs un nombre donné : il suffirait d'arriver à écrire ce nombre sous une forme Φ qui appartînt au premier membre d'une Loi ou du théorème dont celle-ci dépend. Lorsqu'un nombre peut être décomposé en un produit de deux facteurs, trouver une forme qui le représente et qui soit décomposable en un produit de deux formes donnant ces facteurs est un problème que l'on ne peut résoudre ni méthodiquement, ni rapidement. En effet, comme il y a une infinité de formes Φ pouvant représenter un nombre donné ; c'est après plusieurs essais et souvent par hasard que l'on arrive à trouver une forme Φ décomposable en deux facteurs. Par exemple, pour le nombre 1961, exprimé dans le système de numération de base 10, on n'a pas immédiatement l'idée d'écrire

$$1961 = 2000 - 30 - 9$$
$$= 20.10^2 - 3.10 - 9,$$

[1] Le Journal *Sphinx-Œdipe* (1908, Nancy, p. 81-83, 97-101) contient les Lois dont j'ai parlé au Congrès tenu du 3 au 10 août 1908 à Clermont-Ferrand par l'Association française pour l'Avancement des Sciences.

pour considérer la forme

$$20x^2 - 3x - 9,$$

dont on trouve la décomposition en deux facteurs binomes $4x - 3$ et $5x + 3$ par la méthode des coefficients indéterminés, après avoir fait le produit des formes $mx + n$ et $px + q$.

12. Je donne ci-dessous le Tableau des formes premières de la classe I jusqu'au degré 4 inclus. Ces formes sont rangées en *groupes* obtenus en faisant $x = 1$ dans les formes ; ces groupes sont caractérisés par les nombres suivants :

0, —1, 1, —1, 2, —3, 3, 4, 5

TABLEAU DE FORMES PREMIÈRES

0	1	— 2	3
$1\ \bar{0}$	$2\ \bar{1}\ 0$	$3\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{0}$	$2\ 1\ 0$
	$2\ 1\ \bar{0}$		$3\ 1\ 0$
— 1	$3\ \bar{1}\ 0$	**2**	$3\ 2\ 0$
	$3\ 1\ \bar{0}$		$4\ 1\ 0$
$2\ \bar{1}\ \bar{0}$	$3\ \bar{2}\ 0$	$1\ 0$	$4\ 3\ 0$
$3\ \bar{1}\ \bar{0}$	$3\ 2\ \bar{0}$	$2\ 0$	$4\ \bar{3}\ 2\ 1\ 0$
$3\ \bar{2}\ \bar{0}$	$4\ \bar{1}\ 0$	$3\ \bar{2}\ 1\ 0$	$4\ 3\ \bar{2}\ 1\ 0$
$4\ \bar{1}\ \bar{0}$	$4\ 1\ \bar{0}$	$3\ 2\ \bar{1}\ 0$	$4\ 3\ 2\ \bar{1}\ 0$
$4\ \bar{2}\ \bar{0}$	$4\ \bar{2}\ 0$	$3\ 2\ 1\ \bar{0}$	$4\ 3\ 2\ 1\ \bar{0}$
$4\ \bar{3}\ \bar{0}$	$4\ 2\ \bar{0}$	$4\ 0$	**4**
$4\ \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}\ 0$	$4\ \bar{3}\ 0$	$4\ 2\ \bar{1}\ 0$	
$4\ \bar{3}\ \bar{2}\ 1\ \bar{0}$	$4\ 3\ \bar{0}$	$4\ \bar{3}\ 1\ 0$	$4\ 2\ 1\ 0$
$4\ \bar{3}\ 2\ \bar{1}\ \bar{0}$	$4\ \bar{3}\ \bar{2}\ 1\ 0$	$4\ 3\ \bar{1}\ 0$	$4\ 3\ 2\ 0$
$4\ 3\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{0}$	$4\ \bar{3}\ 2\ \bar{1}\ 0$	$4\ \bar{3}\ 2\ 0$	
	$4\ \bar{3}\ 2\ 1\ \bar{0}$	**— 3**	**5**
	$4\ 3\ \bar{2}\ \bar{1}\ 0$		$4\ 3\ 2\ 1\ 0$
	$4\ 3\ \bar{2}\ 1\ \bar{0}$	$4\ \bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{0}$	
	$4\ 3\ 2\ \bar{1}\ \bar{0}$		

A l'aide de ce Tableau, on peut rapidement décomposer en deux formes, dont l'une au moins est Φ (I), les formes Φ composées du degré 5 au degré $2.4+1$ ou 9 inclus, lorsqu'elles admettent une forme Φ (I) comme diviseur, par la *méthode* qui suit. Cette méthode réussit toujours pour tout nombre composé, quand on est parvenu à lui donner une forme qui soit le produit de deux formes dont l'une au moins admet un des facteurs du Tableau.

13. Méthode. — Soit donnée une forme Φ de degré $2m+1$. Il faudra la diviser par les formes premières Φ (I), du degré 1 au degré m, contenues dans les groupes qui vont être déterminés.

Appelons V la valeur numérique prise par la forme Φ quand on y fait $x=1$.

Soit $V=0$.

Alors Φ est divisible par $(1\bar{0})$.

Soit $V<0$ ou $V>0$.

1° Supposons que la valeur absolue V′ de V soit un nombre premier.

Si V est négatif, on a

$$V=1.(-V'):$$

on doit diviser Φ par les formes, jusqu'au degré m inclus, des groupes 1 et $-V'$.

Si V est positif, on a

$$\begin{aligned} V &= (-1).(-V') \\ &= 1.V': \end{aligned}$$

on doit diviser Φ par les formes, jusqu'au degré m inclus, des groupes -1, 1, $-V'$, V'.

2° Supposons que la valeur absolue V′ de V soit un nombre composé; admettons que V′ soit le produit des nombres premiers a et b.

Si V est négatif, on a

$$\begin{aligned} V &= 1.(-V') \\ &= (-a).b \\ &= a.(-b): \end{aligned}$$

on doit diviser Φ par les formes, jusqu'au degré m inclus, des groupes 1, $-V'$, $-a$, b, a, $-b$.

Si V est positif, on a

$$\begin{aligned} V &= (-1)(-V) \\ &= 1.V \\ &= (-a)(-b) \\ &= a.b : \end{aligned}$$

on doit diviser Φ par les formes, jusqu'au degré m inclus, des groupes -1, $-V$, 1, V, $-a$, $-b$, a, b.

Lorsque V' est le produit de plus de deux nombres premiers, il faut considérer les produits deux à deux de ces nombres.

14. En faisant, dans un ordre quelconque, les divisions qui viennent d'être indiquées, si l'on trouve que la forme Φ est divisible par une forme du Tableau, on peut écrire l'identité qui exprime que la forme Φ est un produit de deux formes. La forme diviseur appartient à la classe I ; la forme quotient est ou non décomposable ; pour le reconnaître, on lui applique la méthode.

J'ai vérifié que les formes composées de la classe I, pour les degrés de 1 à 6 inclus, admettent toutes au moins un diviseur appartenant à cette classe. Mais il faudrait démontrer que cette propriété est toujours vraie pour pouvoir affirmer que la forme considérée Φ (I) est première, quand on a appliqué la méthode sans trouver de forme première divisant la forme Φ (I).

15. Premier exemple. — Soit, dans le système de numération de base 10, le nombre 11100999. On voit que ce nombre peut être ainsi écrit :

$$11\ 1009\ 99 = 11101000 - 1 ;$$

Donc, ce nombre est de la forme

$$\Phi(I'') = (7653\bar{0}) ;$$

en y faisant $x = 1$, on trouve 3 ; en divisant la forme Φ (I″) par la première forme (210) du groupe 3, on trouve pour quotient la forme

$$\Phi_1(I'') = (51\bar{0}) ;$$

en y faisant $x = 1$, on trouve 1 ; en divisant la forme Φ_1 (I″) par la première forme $2\bar{1}0$ du groupe 1, on trouve pour quotient la forme

$$\Phi_2(I'') = (32\bar{0}),$$

qui est dans le groupe 3.

On a donc

$$(765\overline{30}) = (210)(5\overline{10})$$
$$= (210)(2\overline{1}0)(32\overline{0}).$$

Par suite

$$11\ 100\ 999 = 111 \,.\, 91 \,.\, 1099.$$
$$= 3 \,.\, 7^2 \,.\, 13 \,.\, 37 \,.\, 157.$$

16. Second exemple. — Soit, dans le système de numération de base 10, le nombre

$$N = 999\ 888\ 989\ 011.$$

On voit que

$$N = 11 \,.\, 90\ 898\ 999\ 001$$
$$N = 11 \,.\, N'.$$

Or, on peut écrire

$$N' = 101\ 000\ 000\ 001 - 10\ 101\ 001\ 000;$$

donc N′ est de la forme

$$\Phi'(\Pi') = (11\ \overline{10}\ \overline{98630}).$$

En faisant $x = 1$ dans cette forme, on trouve 1. Or

$$1 = (-1)(1);$$

on obtient assez rapidement

$$\Phi'(\Pi') = (5\overline{30})\ (\overline{650});$$

par suite

$$N' = 100\ 999 \,.\, 89\ 999.$$

Avec la Table de Burckhardt, on trouve que 100 999 est premier et que 89 999 égale 397. 2267.

17. Remarques. — Avant d'essayer les diviseurs premiers du Tableau, on tiendra compte des remarques suivantes :

I. Le théorème élémentaire de la divisibilité d'un polynôme entier en x par $x \mp a$ indique immédiatement si la forme Φ est divisible par la forme $(1\bar{0})$ ou par la forme (10).

II. Comme on peut écrire

$$(20) = (1\bar{i})\,(1i),$$

i représentant $\sqrt{-1}$, si après avoir remplacé dans une forme Φ, x par i, on a un résultat, où la partie réelle et où le coefficient de i sont nuls, la forme Φ est divisible par la forme (20).

III. Par la mise en facteur commun, on reconnaîtra souvent qu'une forme Φ peut être décomposée en un produit de deux formes.

IV. Parfois l'addition, à une forme, de deux termes égaux en valeur absolue et de signes contraires donne une forme où l'on voit la mise en facteur commun d'une forme. Par exemple, soit la forme $94\bar{1}0)$; on reconnaît que la forme équivalente $(95\bar{5}4\bar{1}0)$ peut s'écrire ainsi :

$$(4)\,(5\bar{1}0) + (5\bar{1}0) \quad \text{ou} \quad (40)\,(5\bar{1}0).$$

V. Lorsque l'on veut appliquer la méthode à un nombre, il est souvent mieux de ne pas le remplacer par le nombre que l'on obtiendrait en le divisant par les nombres premiers dont la forme n'est pas dans le Tableau.

VI. En faisant successivement x égal à 2, 3, 4,... dans une forme, dès que l'on trouve un nombre premier pour valeur numérique, on peut conclure que la forme considérée est première. Par les nombres composés que l'on trouve ainsi, on peut reconnaître si la forme admet comme diviseur une forme du Tableau. Par exemple, pour la forme $(5\bar{1}0)$, on trouve successivement les nombres

$$35 = 7.5, \quad 247 = 13.19, \quad 1029 = 21.49,$$

comme 7, 13, 21 ont pour forme $(2\bar{1}0)$, on en conclut que la forme $(5\bar{1}0)$ est divisible par la forme $(2\bar{1}0)$.

18. Pour la décomposition des formes des classes supérieures à la classe I, je donne à présent deux lois dont l'application se présente souvent.

I. En multipliant l'une par l'autre les deux formes $(\alpha \smile \omega)$ et $\alpha' \smile \omega')$, on trouve cette suite des formes simples :

$$\begin{aligned}
&\big((\alpha + \alpha') + (\omega + \omega')\big)\\
&+ \big((\alpha + \alpha' - 1) \smile (\omega + \omega' + 1)\big)\\
&+ \big((\alpha + \alpha' - 2) \smile (\omega + \omega' + 2)\big)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \big((\alpha + \omega') \smile (\omega + \alpha')\big),
\end{aligned}$$

le nombre des lignes étant égal au nombre des termes de la forme qui en contient le moins. Ces termes formant un trapèze, je conviens de les représenter symboliquement et d'écrire ainsi la loi :

$$tra \begin{pmatrix} (\alpha + \alpha') \smile (\omega + \omega') \\ (\alpha + \omega') \smile (\omega + \alpha') \end{pmatrix} = (\alpha \smile \omega)\,(\alpha' \smile \omega').$$

Le trapèze devient un triangle quand $\alpha + \omega' = \omega + \alpha'$, c'est-à-dire quand les formes $(\alpha \smile \omega)$ et $(\alpha' \smile \omega')$ ont le même nombre de termes.

II. Si l'on fait $\alpha = \alpha'$ et $\omega = \omega'$, on a le carré de la forme $(\alpha \smile \omega)$; l'ensemble des termes forme un triangle; la loi peut s'écrire ainsi :

$$tri \begin{pmatrix} 2\alpha \smile 2\omega \\ \alpha + \omega \end{pmatrix} = (\alpha \smile \omega)^2.$$

19. Application. — Soit, dans le système de numération de base 10, le nombre

$$123\,454\,321.$$

Après avoir décomposé ce nombre en une somme de puissances de 10, on reconnaît qu'il peut être écrit sous la forme suivante :

$$tri \begin{pmatrix} 8 \smile 0 \\ 4 \end{pmatrix};$$

cette forme est le carré de la forme 43210; donc le nombre donné est le carré de 11111.

LE RÉSEAU INTERNE DE GOLGI DES CELLULES NERVEUSES DES GANGLIONS SPINAUX ;

Par R. LEGENDRE.

En 1898, Golgi signala dans les cellules nerveuses des ganglions spinaux et de quelques autres organes un appareil réticulaire interne, distant des surfaces nucléaire et cellulaire et présentant l'aspect de fibrilles ondulées réunies en un réseau irrégulier, avec des renflements nodaux et certaines terminaisons libres. Cet appareil fut retrouvé chez divers animaux par Veratti, Soukhanoff, etc. En 1907, Cajal décrivit dans la plupart des cellules nerveuses un appareil réticulaire analogue au précédent. En 1908, Golgi indiqua une nouvelle méthode permettant de mettre en évidence ce réseau avec une grande facilité et, en 1909, Marcora appliqua cette nouvelle méthode à diverses études sur les cellules nerveuses.

Si l'observation répétée du réseau interne a mis son existence hors de doute, non seulement dans les cellules nerveuses, mais encore dans beaucoup d'autres cellules (Pensa, Negri, Gemelli, Veratti, Marenghi, Brugnatelli, Stropeni, Golgi), son interprétation a donné lieu à plusieurs opinions discordantes. Dès 1898, Golgi, tout en déclarant que ce réseau est différent des neurofibrilles, ne voulut pas se prononcer sur sa signification probable. Holmgren, Studnicka, Retzius, Kölliker admirent que cet appareil est un réseau de canalicules semblables à ceux décrits par Holmgren sous le nom de Trophospongium ; Soukhanoff, au contraire, insista sur ce fait qu'il n'atteint pas la périphérie de la cellule ; Athias essaya de concilier les deux opinions en supposant que seule la partie interne des canalicules est décelée par la méthode de Golgi ; Cajal identifia les deux formations qu'il réunit sous le nom de conduits de Golgi-Holmgren et les compara à la vésicule pulsatile des Infusoires ciliés ; Marinesco les considéra également comme analogues. D'autre part, Goldschmidt et Popoff homologuèrent le réseau interne aux chondriomites et aux mitochondries.

J'ai déjà démontré [1] la nature pathologique des canalicules de

[1] R. Legendre, *C. R. Soc. Biol.*, t. LXIV, 1908 ; *C. R. Assoc. des Anat.*, Xe réunion, 1908 ; *Archives d'Anatomie microscopique*, t. X, 1908.

Holmgren et repoussé leur identification avec le réseau interne ; Golgi (1) vient d'affirmer également que cette comparaison n'a aucun fondement. J'ai déjà repoussé l'analogie du réseau interne et des mitochondries ; Golgi (2) et Perroncito (2) viennent de confirmer cette opinion. Mes observations sur les cellules épithéliales du Lombric et l'examen des figures de conduits de Golgi-Holmgren publiées par Cajal m'avaient conduit à penser que le réseau de Golgi pourrait bien être « un aspect particulier du spongioplasma, ses varicosités étant dues à la substance chromatophile. » Cette hypothèse fut contredite par Collin et Lucien (3), qui virent l'appareil réticulaire localisé à la partie centrale de cellules à corps de Nissl périphériques ; elle reçut au contraire une preuve de Marcora (6) qui, tout en n'admettant pas l'identification du réseau et des corps de Nissl, leur trouva de grandes analogies : aspect semblable, absence de continuité dans les prolongements nerveux, répartition analogue dans le protoplasma, laissant libre la partie périphérique et le cône d'origine.

Dès la publication de la nouvelle méthode de Golgi, en 1908, j'entrepris des recherches sur le réseau interne des cellules ganglionnaires spinales de quelques Mammifères (5). Je m'aperçus bientôt que cette méthode pouvait être simplifiée avec avantage ; les meilleures préparations furent obtenues en suivant la technique de Golgi jusqu'au moment de faire les coupes et en s'arrêtant là ; le réseau apparaît alors en noir sur le fond jaune clair de la cellule et se détache nettement. Les résultats obtenus montrent les grandes analogies du réseau de Golgi avec la substance chromatophile.

I. *Analogies morphologiques.* — Le réseau de Golgi n'est un véritable réseau que dans certaines cellules, chez certains animaux. Chez le Chien, il est très contourné et fin ; chez le Chevreau, au contraire, il est remplacé dans la plupart des cellules par de gros grains irréguliers ; le Lapin, le Cobaye, le Surmulot présentent des formes intermédiaires. On trouve côte à côte des cellules d'aspect très diffé-

(1) C. Golgi, *Sur une fine particularité de structure...* (*Arch. Ital. Biol.*, t. LI, 1909).

(2) Perroncito, *Condriosomi, cromidii ed apparato reticolare interno...* (*Rend. Ist. Lomb.*, vol. XLI).

(3) R. Collin et M. Lucien, *Observations sur le réseau interne de Golgi...* (*C. R. Assoc. des Anat.*, XIe réunion, 1909).

(4) F. Marcora, *Ueber die Beziehungen zwischen dem Binnennetze und den Nisslschen Körperchen* (*Anat. Anz.*, Bd. XXXV, 1909).

(5) Je n'ai pu mettre en évidence de réseau interne chez *Helix*.

rent ; les unes sont parsemées d'une grande quantité de petits points noirs ; d'autres ont de gros grains plus ou moins effilés sur les bords ; d'autres ont un réseau ou des fragments de réseau à points nodaux renflés ; d'autres encore présentent de véritables pelotons irréguliers, tordus, parsemés de gros grains ou d'anneaux. Ces différences d'aspect ne semblent pas dues à des irrégularités d'imprégnation, mais bien à des différences réelles de structure ; certaines cellules ont un aspect sombre, des grains nombreux, un réseau dense qui font songer aux cellules sombres que montre la méthode de Nissl. La disposition des grains et des varicosités du réseau est concentrique aux surfaces nucléaire et cellulaire ; une mince zone périnucléaire est toujours respectée ; la périphérie de la cellule est également libre de toute granulation sur une épaisseur plus ou moins grande. Le cône d'origine de l'axone ne présente aucun grain et la limite de ceux-ci coïncide toujours avec celle de la substance chromatophile. Tous ces caractères, et plus encore l'aspect général des préparations, montrent une distribution identique des deux substances. Ces faits viennent d'ailleurs d'être signalés en partie par Marcora.

II. *Analogies chimiques.* — On sait que la substance chromatophile disparaît par l'action des alcalis, soit qu'ils la dissolvent (Eve, Held, Bühler, Ewing) ou qu'ils la rendent incolorable (Bethe). Il était intéressant de savoir ce que devient le réseau interne soumis à la même action. La soude ne pouvant être employée à cause de son action sur le nitrate d'argent, j'ai utilisé l'ammoniaque à 1 0/0 agissant pendant une heure soit avant, soit pendant, soit après la fixation. L'action de l'ammoniaque avant la fixation altère beaucoup les cellules, celle après la fixation est préférable. J'ai essayé cette réaction sur les ganglions spinaux du Cobaye, du Surmulot et du Lapin, le ganglion symétrique servant de témoignage de la réussite de l'imprégnation, et chaque fois, j'ai obtenu la non-coloration du réseau interne, les cellules restant d'une couleur jaune pâle homogène.

III. *Analogies physiologiques.* — Marcora a déjà fait connaître [1] les modifications du réseau interne des cellules nerveuses du noyau d'origine du grand hypoglosse consécutives à l'arrachement et à la section de ce nerf. Quatre jours après l'arrachement, le réseau paraît

[1] F. Marcora, *Di una fine alterazione delle cellule nervose del nucleo di origine del grande ipoglosso consecutive allo strappamento ed al taglio del nervo* (*Boll. Soc. Med. di Pavia*, 1908).

brisé et repoussé ainsi que le noyau à la périphérie ; le centre de la cellule est homogène. Quinze jours après l'opération, le réseau n'apparaît plus que comme un amas de petits fragments réunis par de minces et courts filaments contournés et entortillés. La section du nerf produit des lésions analogues, mais moins graves. Si l'on rapproche ces observations de celles de Nissl, Marinesco, Lugaro, Flatau, van Gehuchten, etc., faites par la méthode de Nissl, on est frappé de leur parallélisme ; les troubles commencent vers la quarantième heure et s'aggravent jusqu'au quinzième jour ; ils consistent en déplacement du noyau, désagrégation, fragmentation de la substance chromatophile qui devient granuleuse ; cette chromatolyse marche du centre vers la périphérie.

J'ai fait également deux expériences qui montrent les mêmes analogies. Avec l'aide du Dr Busquet, j'ai excité pendant trente-cinq minutes la racine postérieure d'un ganglion lombaire d'un Chien, le ganglion symétrique servant de témoin. Les différences d'aspect du réseau dans les deux ganglions sont très nettes. La plupart des cellules du ganglion témoin présentent un réseau complet, très contourné, arrivant jusqu'auprès de la surface nucléaire ; celles du ganglion excité ont un réseau plus lâche, situé seulement à la périphérie de la cellule, parfois fragmenté. Les expériences de Hodge, Vas, Lambert, Lugaro, Pugnat, Pick, etc., montrent dans les mêmes conditions une disparition de la substance chromatophile qui débute par le centre, laissant un anneau de granules localisé à la périphérie.

J'ai à deux reprises, chez un Lapin, greffé sous la peau de l'oreille, des ganglions spinaux pris à un autre Lapin, puis examiné par la méthode de Golgi et par celle de Nissl l'état de leurs cellules trois, cinq, sept, quinze, vingt et une, vingt-quatre heures après l'opération. Les modifications de la substance chromatophile et du réseau interne marchent parallèlement. Dans quelques cellules, le réseau se fragmente en petits granules vers la cinquième heure ; ce changement apparaît dans un plus grand nombre de cellules vers la septième heure, et à ce moment certaines sont déjà homogènes ; à la vingt-quatrième heure, presque toutes les cellules n'ont plus ni réseau ni grains et sont homogènes. Or, Marinesco a signalé les transformations de la substance chromatophile dans les mêmes conditions, aboutissant à l'achromatose vers la vingt-quatrième heure ; l'achromatose à la vingt-quatrième heure a été également signalée par Nageotte.

Un tel ensemble d'analogies morphologiques, chimiques et physiologiques fait penser à une identité de nature. Toutefois Collin et

Lucien ont pu voir simultanément le réseau et les corps de Nissl occupant des positions différentes dans certaines cellules, l'un étant périnucléaire, les autres périphériques. Marcora, qui a fait la même double coloration, les a vus intermédiaires, les corps de Nissl occupant les mailles du réseau interne. L'analogie des deux structures ne va-t-elle donc pas jusqu'à l'identité ?

Il est très difficile d'affirmer ou de nier l'identité de ces deux formations. J'ai pu reconnaître les faits suivants : 1° le fixateur de Golgi ne détruit pas la substance chromatophile et n'empêche pas sa coloration par la méthode de Nissl ; 2° le réseau interne ne se présente pas toujours comme un réseau, mais a fréquemment l'aspect de granulations plus ou moins effilées et liées ensemble ; 3° les doubles colorations du réseau et de la substance chromatophile montrent bien parfois des corps de Nissl à côté des granules ou des filaments argentiques, mais rien ne permet d'affirmer qu'ils sont intercalés les uns aux autres ; les gros granules argentiques apparaissent alors dans les cellules à gros corps de Nissl, les fins granules et les filaments en réseau dans les cellules à substance chromatophile poussiéreuse ou filamenteuse ; 4° il est possible que l'argent ne se précipite pas sur tous les corps de Nissl, mais qu'il agisse d'une manière inconstante comme dans beaucoup d'autres circonstances (imprégnation noire de Golgi, imprégnations neurofibrillaires).

En résumé, la méthode de Golgi ne permet pas d'affirmer l'identité du réseau interne et du réseau spongioplasmique incrusté de corps de Nissl. Mais elle ne permet pas non plus d'affirmer leur nature différente. Toutefois les grandes analogies morphologiques, le parallélisme des réactions de ces deux substances à divers agents chimiques ou physiologiques plaident fortement en faveur de la première hypothèse.

PRÉSENTATION A LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

Par Ernest LEBON

DE SON OPUSCULE INTITULÉ :

Savants du Jour :

GASTON DARBOUX, Biographie, Bibliographie analytique des Écrits

Un volume grand in-8° (28-19) de VIII-72 pages, papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure ; Paris, Gauthier-Villars, 10 janvier 1910.

Séance du 22 *janvier* 1910.

J'ai l'honneur de présenter à la Société Philomathique un Opuscule contenant la Biographie de M. Gaston Darboux, membre honoraire de la Société, et la Bibliographie analytique de ses Écrits.

Dans sa jeunesse, M. G. Darboux fut un membre très assidu aux Séances, et y a fait plusieurs Communications dont les plus importantes, imprimées dans notre *Bulletin*, ont les titres suivants :

Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre (23 novembre 1872);

Sur un nouveau système de coordonnées et sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques (25 mai, 8 juin 1872).

Sur les surfaces orthogonales (17 février 1866) ;

Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points (25 avril, 16 mai 1868);

Sur les polygones inscrits et circonscrits à l'ellipsoïde (23 avril 1870).

Sur les lignes asymptotiques de la surface de Steiner (12 avril 1873).

Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace (9 mars 1872);

En tête de cet Opuscule, j'ai publié une Notice où se trouvent retracée la belle carrière parcourue par notre Collègue et donnés les principaux caractères de ses intéressantes recherches. Qu'il me soit permis de rappeler ici quelques passages de cette Notice.

« M. Darboux a généralisé des questions dont des cas particuliers avaient seuls été abordés. Il a su établir des rapprochements entre des théories dont on n'avait pas encore aperçu les points communs. Il a fait faire de sensibles progrès à la solution de problèmes qui se rencontrent en analyse et en physique mathématique. Dans un important Ouvrage sur la *Géométrie infinitésimale*, dont les quatre volumes ont été publiés de 1887 à 1896, il a exposé non seulement les travaux de ses devanciers, mais encore ses recherches personnelles, qui auraient pu donner naissance à un grand nombre de Mémoires originaux... »

« Avec le même soin et la même compétence, M. Darboux a commencé en 1898, *Sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, la publication d'un Ouvrage qui complète le précédent... »

« L'ensemble de ces deux Ouvrages constitue une histoire documentée de la Géométrie infinitésimale pendant le XIXe siècle. M. Darboux a tracé les grandes lignes de cette histoire dans la Conférence qu'il a faite au Congrès des mathématiciens tenu à Rome en avril 1908. Quelques années avant, au Congrès d'Arts et de Science tenu à Saint-Louis en septembre 1904, il avait lu une Étude approfondie sur le développement de toute la Géométrie moderne. De plus, il a fourni de précieux matériaux à l'histoire des Sciences en analysant un grand nombre d'Ouvrages variés, en composant quelques Éloges et Notices historiques et plusieurs Discours qu'il a lus dans de solennelles cérémonies où il représentait l'Institut, le Gouvernement ou l'Université de Paris. Tous ces écrits donnent à M. Darboux une place importante dans le monde des lettres... »

« M. Darboux est resté simple et modeste, bien qu'il soit arrivé à une situation très élevée. Il importe de faire remarquer qu'il la doit seulement à ses efforts et à son talent : aucun de ses ascendants n'a occupé de position même modeste, dans le monde de la science, de l'administration ou de la politique ; si des savants l'ont protégé au début de sa carrière et lui ont ouvert les portes de la gloire, c'est qu'ils avaient vu dans ses travaux des points de nature à faire progresser la Science et reconnu en lui des qualités de premier ordre... »

En faisant précéder les principales Sections de mon travail d'appréciations dues à des hommes illustres, il me semble que j'y ai introduit des éléments qui font oublier la sécheresse inévitable de suites analytiques d'énumérations de titres d'écrits, bien que les titres vagues soient accompagnés de sobres explications.

C'est pourquoi j'ose me flatter d'être parvenu à composer un Ou-

vrage qui soit à la fois intéressant pour les personnes qui désirent connaître, seulement dans son ensemble, l'œuvre de M. Gaston Darboux, très utile à celles qui se livrent à des études et des recherches dans le domaine si étendu de l'Analyse pure et de la Géométrie infinitésimale.

Je crois avoir signalé tous ses écrits originaux et les principales analyses dont ils ont été le sujet. Ce n'est qu'après les avoir lus ou parcourus que j'ai donné les références et les renseignements qui s'y rapportent. On rendrait service à la Science en m'indiquant les omissions.

Il importe de faire remarquer que M. Gaston Darboux, après avoir lu mon manuscrit, a bien voulu me donner de précieux conseils pour le classement analytique des Mémoires et des Notes, et qu'il a aussi lu et approuvé la dernière épreuve d'imprimerie de cet Opuscule.

Dans la séance du 17 janvier 1910 de l'Académie des Sciences, ce livre a été signalé par le Secrétaire perpétuel M. van Tieghem et présenté en ces termes par le Président M. Emile Picard :

« Je dépose sur le bureau, de la part de M. Ernest Lebon, un Ouvrage intitulé Gaston Darboux, qui renferme une *Biographie* et une *Bibliographie analytique des Écrits* de M. Darboux. M. Lebon a entrepris de publier une série de petits volumes de nature analogue, sous le titre général de *Savants du Jour*. Déjà, il y a quelques mois, le premier volume de cette série, consacré à M. Henri Poincaré, a été présenté à l'Académie.

Dans l'Opuscule actuel, on trouvera une très intéressante biographie de notre Secrétaire perpétuel, avec une vue générale sur son œuvre scientifique. La liste des Mémoires et Ouvrages, qui ont été été distribués en sept Sections, a été établie avec un soin extrême. Leur énumération constituerait déjà un document précieux; mais M. Lebon ne s'en est pas tenu là. Il donne quelquefois un court résumé du travail mentionné, et indique les analyses dont il a fait l'objet. La Collection, dont M. Ernest Lebon vient de publier les deux premiers volumes, rendra certainement les plus grands services aux chercheurs et aux historiens de la Science. »

Je ne voudrais pas terminer cette présentation sans remercier publiquement la Commission administrative de l'Académie des Sciences d'avoir bien voulu honorer d'une importante souscription la Collection que j'ai entreprise sur les *Savants du Jour*.

Tours, imprimerie Deslis Frères, 6, rue Gambetta.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE I

	Pages.
Liste des membres de la Société	3
Joseph Deschamps. — Notes de géométrie analytique	9
Ernest Lebon. — Théorèmes et lois pour la décomposition de grands nombres en deux facteurs	45
R. Legendre. — Le réseau interne de Golgi des cellules nerveuses spinales	54
E. Lebon. — G. Darboux, biographie, bibliographie analytique des écrits	59

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série : 1789-1805	3 volumes in-4°	
2e série : 1807-1813	3 volumes in-4°	
3e série : 1814-1826	13 fascicules in-4°	
4e série : 1832-1833	2 volumes in-4°	
5e série : 1836-1863	28 fascicules in-4°	
6e série : 1864-1876	13 fascicules in-8°	
7e série : 1877-1888	11 volumes in-8°	
Chaque année pour les Membres de la Société		5 francs
— pour le public		12 —

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

A L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à MM. Désiré André; E. Becquerel, de l'Institut; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut; Bouty, de l'Institut; Bourgeois; Descloizeaux, de l'Institut; Fouret; Gernez; Hardy; Haton de La Goupillère, de l'Institut; Laisant; Laussedat; Léauté, de l'Institut; Mannheim; Moutier; Peligot, de l'Institut; Pellat; — *pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix; Bureau; Bouvier, de l'Institut; Chatin, de l'Institut; Drake del Castillo; Duchartre, de l'Institut; H. Filhol, de l'Institut; Franchet; Grandidier, de l'Institut; Henneguy, de l'Institut; Milne-Edwards, de l'Institut; Mocquard; Poirier; A. de Quatrefages, de l'Institut; G. Roze; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ A LA SORBONNE

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES, 6, RUE GAMBETTA.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME II

N° 2-3

1910

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

1910

Le Secrétaire-Gérant,
H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons bimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1910

Président : M. C. Matignon, 17, B^d Carnot, Bourg-la-Reine.
Vice-Président : M. Hua, 254, boulevard Saint-Germain.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.
Vice-Secrétaire des séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 118, avenue d'Orléans.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V^e.

EXTRAITS DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES

Séance du 8 janvier 1910.

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN.

Il est procédé à l'élection du vice-président, du trésorier, et des membres de la Commission des comptes. Sont nommés pour 1910 :

Vice-président : M. Hua;
Trésorier : M. Rabaud;
Membres de la Commission des comptes : MM. Rivet, Mayer et Léauté.

M. Perrin, président sortant, adresse des remerciements à la Société et cède le fauteuil à M. Matignon.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON.

M. Matignon adresse ses remerciements à M. le Président sortant et à l'Assemblée.

M. Berthelot entretient la Société des formules fondamentales de sustentation des aéroplanes.

Séance du 22 janvier.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, PRÉSIDENT.

M. Lebon présente le nouveau volume de la Collection *Les Savants du jour*, qu'il vient de consacrer à M. G. Darboux.

M. Deschamps complète sa communication antérieure en donnant quelques exemples de l'emploi des formules qu'il a indiquées.

Séance du 12 février.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, PRÉSIDENT.

M. Terroine fait une communication sur la digestibilité des triglycérides et de différentes graisses alimentaires.

M. Matignon entretient la Société de la décomposition des molécules élémentaires.

Séance du 26 février.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, PRÉSIDENT.

M. Goutal expose une méthode personnelle et nouvelle d'extraction des gaz dissous ou occlus dans les aciers.

M. Becquerel rappelle l'ensemble de ses recherches sur la phosphorescence des sels d'uranyle.

Séance du 12 mars.

PRÉSIDENCE DE M. HUA, VICE-PRÉSIDENT

M. Nicolardot est élu dans la 2e section.

M. Legendre fait une communication sur les rapports du réseau interne de Golgi et des corps de Nissl des cellules nerveuses des ganglions spinaux.

M. Rabaud rapporte quelques observations concernant le *Larinus Leuzeæ*, parasite des *Leuzea conifera* et *Stechalina dubia*.

Séance du 19 mars.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

M. le capitaine Nicolardot entretient la Société de la question de l'incandescence et du chauffage par le gaz.

Séance du 23 avril.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, PRÉSIDENT.

M. Cayeux expose le but et les résultats des fouilles de Délos dont il fut chargé, et fait ressortir, à cette occasion, l'intérêt des applications de la Géologie à l'Archéologie.

Séance du 28 mai.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

Le Président annonce le décès de M. Raoul Perrin, membre et ancien président de la Société.

M. Guieysse expose quelques résultats des recherches encore inachevées sur la présence des mitochondries dans les cellules de l'hépatopancréas des Crustacés.

Séance du 25 juin.

PRÉSIDENCE DE M. MATIGNON, PRÉSIDENT

M. Moureu fait hommage à la Société de l'ouvrage qu'il vient de publier sous le titre : *Chimie et Physique des eaux minérales.*

M. Matignon expose la question de la production de l'hydrogène pour le gonflement des dirigeables, et cite plusieurs procédés nouveaux actuellement appliqués ou à l'étude.

Le banquet de la Société Philomathique a eu lieu le 28 février, au restaurant Champeaux.

Étaient présents : MM. D. André, Becquerel, Berthelot, Cayeux, Dongier, Fauré-Frémiet, Goutal, Henneguy, Hua, Launoy, Lecaillon, Mahler, Matignon, Mayer, Michel, Moureu, Pellegrin, Perrin.

S'étaient excusés : MM. Bourgeois, Laisant.

Au dessert, M. Matignon, président, a prononcé l'allocution suivante :

Messieurs et chers Confrères,

Chacun d'entre nous, le jour de son entrée à la Société Philomathique, prend en quelque sorte l'engagement tacite de mettre en pratique notre devise : Etude et Amitié, qui condense sous une forme lapidaire les deux devoirs du philomathe.

Dans nos séances du samedi, consacrées plus spécialement à l'étude, nous nous efforçons de remplir le premier de nos devoirs, mais nous n'oublions pas en même temps de satisfaire au second. C'est qu'en effet nos réunions se font toujours sous l'égide de l'amitié ; elles en ont tous les caractères, la simplicité, la franchise, la bienveillance et l'intimité.

A la Société Philomathique, nous ne craignons pas de dévoiler toute notre pensée, d'émettre toutes les idées qui nous traversent l'esprit sur les sujets les plus variés, et les plus éloignés de nos occupations familières ; nous savons que nos erreurs ne sont pas à redouter, car nos idées seront toujours examinées avec bienveillance dans un milieu sympathique et, quoiqu'il arrive, nous ne pourrons que profiter de la discussion pour augmenter ou préciser nos connaissances.

Aussi ne crains-je pas d'ajouter, qu'il n'existe aucune Société où les causeries aient plus d'abandon, plus d'imprévu et par conséquent plus de charmes.

Si nos séances d'études sont toujours amicales, il nous arrive cependant, une fois par an, de dissocier l'étude et l'amitié, pour sacrifier, comme ce soir, uniquement à l'amitié. Et en agissant ainsi nous remplissons le deuxième devoir de tout bon philomathe. Permettez-moi donc, puisque l'ancienneté dans ma section me confère cette année la fonction présidentielle, de vous dire à tous mes biens vifs remerciements pour votre présence à la réunion de l'amitié.

Au temps de Cicéron, c'est lui qui nous le dit, l'œuvre de l'amitié n'était considérée comme complète que lorsqu'on avait mangé ensemble plusieurs boisseaux de sel. Nous n'avons plus aujourd'hui les loisirs des Romains, et pour donner la traduction moderne de la pensée de Cicéron, nous devons ramener à de plus modestes proportions les dimensions du boisseau. Quoi qu'il en soit, c'est toujours à la chaleur communicative des banquets, chaleur communicative

bien connue, qu'il convient de venir réchauffer l'amitié. Je ne saurais donc trop engager les membres de notre Société à se réunir plus nombreux dans l'avenir et j'exprimerai le regret, comme mon prédécesseur M. Perrin l'avait fait l'an dernier, de ne voir ici qu'un nombre assez restreint de nos membres honoraires.

Notre collègue M. Mahler a pris, comme vous le savez, l'initiative de demander à un graveur de talent, M. Jacques Froment-Meurice, le projet d'une plaquette destinée aux membres de la Société. L'artiste a déjà donné une esquisse de son projet. La plaquette en bronze aurait 8 centimètres sur 7 centimètres. A l'avers, une allégorie personnifierait chacune de nos trois sections. Au revers serait représentées la place et l'entrée de la Sorbonne, avec des motifs évoquant notre devise et permettant l'inscription du nom de quelques-uns de nos aînés les plus célèbres. Il serait nécessaire, pour donner suite à l'idée de M. Mahler, qui a souri à beaucoup d'entre nous, de connaître au moins d'une façon approximative le nombre des souscripteurs éventuels. Je vous serai donc obligé, mes chers confrères, de vouloir bien faire un peu de propagande autour de vous afin de préparer un bon accueil à la circulaire-souscription qui sera adressée prochainement à tous les membres de la Société.

Messieurs, la Société Philomathique est à la veille d'entrer dans la 122e année de son existence. Pendant ce long espace de temps, les hommes éminents qu'elle a comptés dans son sein ont tenu une place importante dans la science. Comme l'a dit mon maître Berthelot, si l'on voulait résumer les découvertes qui ont été présentées à la Société, il faudrait entrer dans le vaste exposé des développements mêmes de la science au XIXe siècle.

Quel chemin parcouru depuis son origine! C'était alors le temps, par exemple, où deux de ses fondateurs, Sylvestre et Riche, auxquels s'était adjoint Vauquelin, essayaient en vain de combiner l'azote et l'oxygène sous l'influence des étincelles électriques. Aujourd'hui, l'usine suédoise de Nottoden est à la veille d'utiliser 300.000 chevaux pour réaliser couramment cette réaction et apporter à l'agriculture un supplément d'engrais nitratés.

Au milieu des transformations subies fatalement depuis sa fondation, notre Société a su conserver son caractère encyclopédique, et son objet ne s'écarte guère de celui qui lui était imposé par le règlement de 1798 : travailler au développement des sciences suivantes : l'Histoire naturelle, l'Anatomie, la Physique, la Chimie, l'Art de guérir, les Arts mécanique et chimique, l'Economie rurale et le Commerce, les Mathématiques, l'Archéologie.

La variété des communications faites dans nos séances de quinzaine témoigne que la Société Philomathique est toujours restée une véritable mutualité scientifique, où chacun d'entre nous met à profit les études des collègues des autres sections pour s'instruire dans un domaine qui n'est pas le sien. C'est encore là un des charmes de notre Société.

Avant de terminer, je suis sûr d'être votre interprète en saluant ici tout particulièrement deux de nos membres honoraires, MM. Henneguy et Desiré André. M. Henneguy est un des vaillants et des fidèles de notre Société, toujours assidu à nos séances, il nous donne à tous l'exemple du philomathe consciencieux. M. Desiré André est également un des piliers de notre groupement, son nom est dès maintenant attaché à l'histoire de la Société, et il en serait certainement le secrétaire perpétuel, si les principes égalitaires et républicains qui ont présidé à sa fondation ne s'opposaient, chez nous, à l'existence de fonctions permanentes.

Je vous propose, mes chers confrères, de lever votre verre à la vitalité de notre vieille Société Philomathique et au développement toujours croissant des liens qui unissent les philomathes.

LES CREVETTES A MALES DIMORPHES DU GENRE *SARON*

Par H. COUTIÈRE

Depuis la description de l'*Hippolyte marmoratus* Olivier et *H. gibberosus* H. M. Edwards par ce dernier auteur (1), la question a été plusieurs fois ouverte de savoir si ces deux espèces sont identiques ou distinctes. Pour ne citer que les opinions décisives, Borradaile, en 1898, se fondant sur l'examen de spécimens provenant de Rotuma (Fidji), émit l'idée qu'il s'agissait d'une seule espèce à ♂ dimorphes, tantôt *marmoratus*, tantôt *gibberosus*, alors que les ♀ sont toujours de cette dernière forme (2). Tous les autres auteurs, Thallwitz, Ortmann, Nobili, et surtout de Man, sont au contraire d'avis que les deux espèces sont distinctes. Dans ses publications de 1897 et 1902, de Man a défini avec une précision parfaite les caractères de l'*H. gibberosus*, ou, comme il est préférable de le nommer avec Thallwitz, de *Saron gibberosus* (3). Se basant sur les caractères de quelques ♂ d'Amboine, de Man montre quelles différences de forme et de dimensions des maxillipèdes externes séparent ces ♂ des spécimens *gibberosus* des deux sexes. Il rappelle à ce sujet l'opinion de Randall, qui décrit les ♀ de *marmoratus* comme possédant des maxillipèdes de dimensions moitié moindres que celles des ♂ correspondants. Les dimensions importent encore moins que la forme, remarque de Man, et les deux espèces devraient être définitivement tenues pour distinctes, s'il était démontré que ces appendices des ♀ se terminent en pointe effilée (4). Nobili (5) demande aussi à voir les ♀ *marmoratus* — non encore découvertes. — Je ne crois pas que ce désir se réalise.

Dans son travail de 1902, de Man (6) découvre, parmi les spécimens *gibberosus*, une espèce nouvelle, qui avait échappé jusqu'alors à tous les auteurs, et qu'il distingue comme *Saron neglectus*. C'est l'exis-

(1) 1837, H. M. Edwards, *Hist. nat. des Crustacés*, t. II, p. 378.
(2) 1898, Borradaile, *Proc. Zool. Soc.*, p. 1009.
(3) 1891, Thalwitz, *Dekap. Studien. — Abh. und Ber. des K. Museum Dresden*, n° 3, p. 25.
(4) 1897, De Man, *Zool. Jahrb.*, *Syst.*, IX, p. 761, pl. XXXVI, *fig.* 68, *c*, *d*, *e*.
(5) 1906, Nobili, *Bull. Scient. Fr. et Belgique*, XL, p. 35.
(6) 1907, De Man, *Senck. Naturg. Ges.*, XXV, 3, p. 852-854, pl. XXVI, *fig.* 57-58.

tence de cette espèce qui a fait croire aux variations dans la forme du rostre et des méropodites chez le *S. gibberosus* (1). Il a été depuis longtemps démontré que l'*H. Hemprichii* Heller, de la mer Rouge, était un synonyme du *S. gibberosus*.

J'ai trouvé, dans les collections du Muséum, une série de spécimens qui me permettent des conclusions très décisives. Ce sont les suivantes :

1° La séparation spécifique du *Saron neglectus* de Man est parfaitement fondée;

2° Les *S. marmoratus* et *gibberosus* sont une seule et même espèce dont les ♂ ne sont pas à proprement parler dimorphes, mais présentent, dans le développement des maxillipèdes externes et des pattes de la première paire, des différences qui peuvent être excessives (de 1 à 10 comme volume et poids du membre);

3° Le même polymorphisme se remarque chez les ♂ du *S. neglectus*, mais paraît porter seulement sur les pattes de la première paire.

Voici quelques détails sur les spécimens étudiés :

S. marmoratus ♂ (forme *gibberosus*). — Ces ♂ ont été si complètement décrits, par de Man en particulier, qu'il est difficile d'ajouter à la sûreté de leur identification. Je remarque seulement que l'espèce porte des touffes de soies plumeuses dans les intervalles des épines médianes du côté dorsal, y compris le dernier intervalle, limité en arrière par une saillie non épineuse de la région cardiaque. Les maxillipèdes externes, toujours plus courts que le scaphocérite, sont également garnis de longues soies plumeuses, surtout dans la région de l'article médian, en deçà et au delà. Le méropodite de la deuxième paire est, sans exception, divisé en deux segments (*fig.* 1, *g* 5). Le tranchant des doigts de la pince qui termine ce membre est sur la ligne médiane, et dépourvu de spinulations. Les pattes de la troisième paire sont plus grêles que chez le *S. neglectus*, le méropodite est 7,5 fois et le propodite 12 fois plus long que large. Le dactyle porte 5 griffes à son bord inférieur, parfois 6 (*fig.* 1, *g* 7. 8).

Les pinces de la première paire ont les proportions suivantes : doigt, 1; longueur totale, 3,75-3,8; hauteur, 0,9; carpe, 2,6-2,7. La pince est contenue au moins 12 fois dans la longueur totale du corps à partir du bord postérieur de l'orbite, le rostre étant exclu.

Le carpe porte en dedans, près de son extrémité distale, une échancrure et une ligne de soies en chevron à sommet postérieur, vestige

(1) 1890, Ortman, *Zool. Jahrb.*, *Syst.*, V. p. 497.

de l'appareil nettoyeur que j'ai découvert chez les Eucyphotes, mais dont la portion palmaire a disparu (*fig.* 1, *g* 6).

S. marmoratus ♂ (forme *marmoratus*). — Les variations par rapport au type précédent se produisent dans deux directions, qui paraissent être toujours associées. Les maxillipèdes externes s'allongent et s'atténuent, leur armature distale s'espace le long de leurs

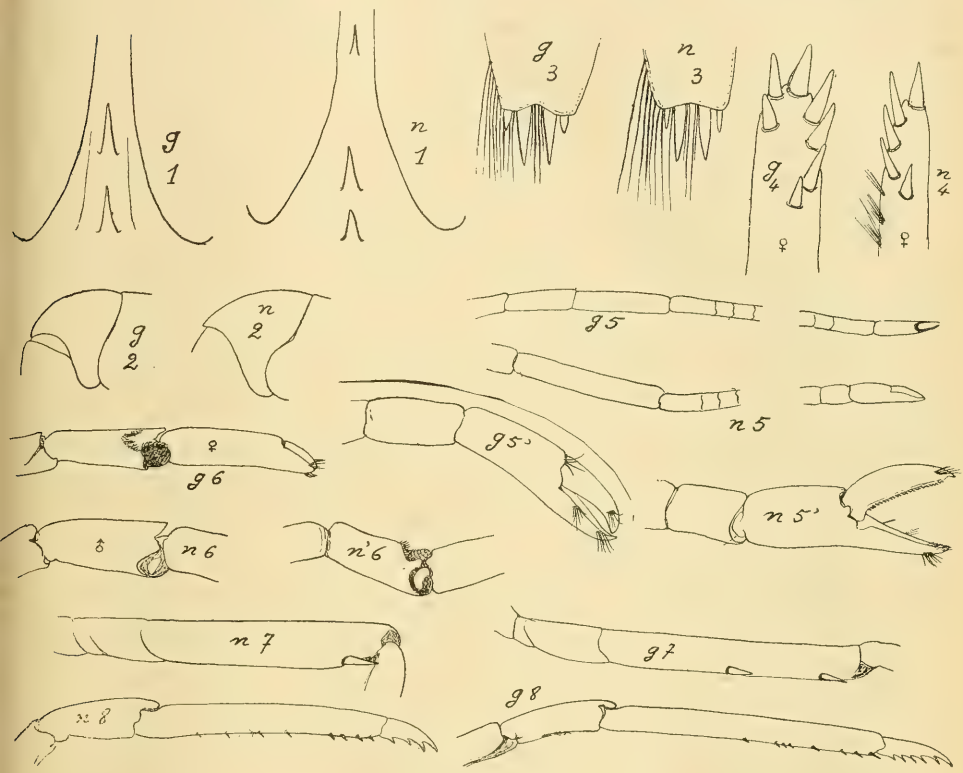


FIG. 1 (*g* = *gibberosus*, *n* = *neglectus*).

1, base du rostre ; — 2, 3e pléosomite ; — 3, extrémité du telson ; — 4, extrémité du 3e maxillipède de la ♀ ; — 5, méropodite et carpe de la 2e paire ; — 5', pince de la 2e paire ; — 6, carpe de la 1re paire, *n* 6 chez le ♂, *n'* 6 chez la ♀ ; — 7, méropodite de la 3e paire ; — 8, extrémité de la 3e paire.

extrémités, ses épines sont plus faibles, plus rares, peuvent se réduire beaucoup, jusqu'à manquer totalement. D'autre part, les pinces de la première paire, tout en conservant leurs proportions, augmentent de volume et de taille de façon démesurée.

J'ai rapporté de Djibouti un ♂ particulièrement intéressant en ce

que la variation des maxillipèdes est beaucoup plus prononcée que celle des pinces. Tandis que, chez les ♂ *gibberosus*, le segment médian de ces appendices ne dépasse pas, ou à peine, l'extrémité du carpocérite, ici, c'est l'article basal des maxillipèdes qui atteint le même niveau, et le membre dépasse le scaphocérite des 2/3 de l'article distal (*fig.* 2, 21). Le rapport entre les maxillipèdes de deux ♂ de même taille est égal à 1,65. Celui entre les pattes de la première paire n'atteint que 1,4, et 1,36 entre celles de la deuxième paire. Les pattes suivantes ne présentent plus de différences de longueur.

L'armature distale des maxillipèdes ne présente pas de différences avec celle des ♂ *gibberosus*, sauf en ce qui concerne les denticules plus faibles entre les épines mobiles. J'ai d'ailleurs vu cette même atténuation chez deux ♂ *gibberosus*, sans allongement correspondant des appendices (*fig.* 2, 11).

Les pinces de la première paire sont d'un type assez différent de la normale par le raccourcissement des doigts (*fig.* 2, 21). Ceux-ci étant pris pour unité, la longueur totale de la pince est 4,5 (au lieu de 3,8), la hauteur 0,95 au lieu de 0,9. Le carpe s'est allongé, il n'est plus contenu que 1,3 fois (au lieu de 1,44) dans la longueur de la pince. Ce spécimen est le seul que j'aie vu présenter ce mode de variation, qui n'est pas tout à fait celui aboutissant aux *marmoratus* typiques. Il se trouve parmi une trentaine de spécimens *gibberosus* parfaitement normaux.

Un exemplaire venant se placer dans le voisinage, au moins comme étendue de la variation, provient d'Hogoleu (Jacquinot) (*fig.* 2, 12). Il est accompagné de trois autres ♂ *gibberosus* normaux. Les maxillipèdes rappellent comme longueur ceux de l'exemplaire précédent, mais l'article distal se termine par une pointe conique non mobile laissant voir le processus par lequel les autres épines sont peu à peu espacées et atténuées (*fig*, 2, 14). Les pinces de la première paire sont très inégales, avec les proportions suivantes (*fig.* 2, 13) :

$$\text{doigt, } 1\text{ ; longueur totale } \begin{cases} 3,3 \\ 3,61 \end{cases} \text{ hauteur } \begin{cases} 0,9 \\ 0,77 \end{cases} \text{ carpe } \begin{cases} 1,8 \\ 2,22 \end{cases}.$$

La plus grande est contenue 7 fois dans la longueur totale ; la plus petite, 10 fois. Ni l'une ni l'autre n'ont conservé les proportions qu'elles possèdent normalement, l'une étant plus grêle, l'autre plus trapue qu'à l'ordinaire, mais leur accroissement de taille est surtout à noter.

L'existence de spécimens tels que ceux qui précèdent suffirait à

montrer le peu de stabilité de l'espèce *gibberosus*, en même temps que la naissance des caractères *marmoratus*. Ces derniers vont maintenant s'accentuer.

Sur 7 spécimens de Tongatabu (Quoy et Gaymard), 6 sont des *gibberosus* typiques (4 ♀, 2 ♂), le septième est un ♂ franchement

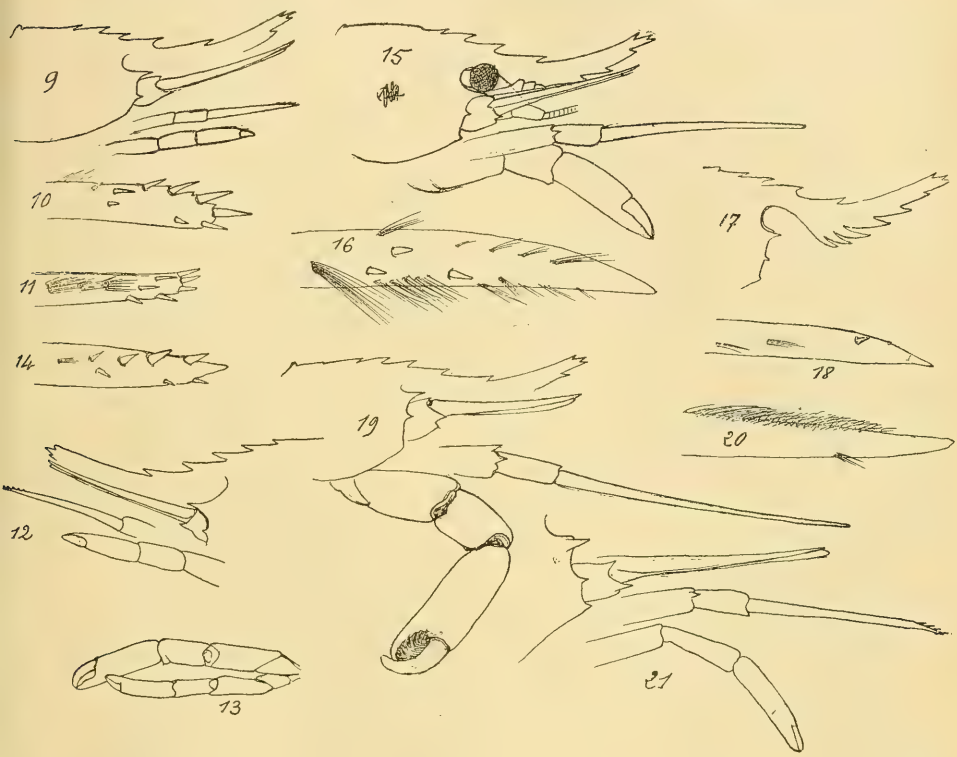


Fig. 2.

9, ♂ typique de *S. gibberosus* (Djibouti); — 10, extrémité du maxillipède; — 11, autre forme du maxillipède chez certains ♂ *gibberosus*; — 12, ♂ provenant d'Hogoleu; — 13, pinces de la 1re paire du même ♂; — 14, *Id.*, maxillipède; — 15, ♂ *marmoratus* (type de H. M. Edwards); — 16, *Id.*, maxillipède; — 17, *Id.*, rostre; — 18, maxillipède d'un ♂ *marmoratus* de Viti; — 19, grand ♂ *marmoratus* de Fidji; — 20, maxillipède; — 21, ♂ aberrant de Djibouti.

marmoratus. Une seule des pinces de la première paire est présente, elle est contenue 5 fois dans la longueur totale, et ses proportions sont : doigt, 1 ; longueur totale, 2,7 ; hauteur, 0,83. Comme dans le spécimen précédent, les doigts de la pince deviennent volumineux, le doigt mobile se courbe en demi-cercle ; son opposé prend un tubercule obtus, ils deviennent béants et leur intervalle se garnit

de soies serrées. Le volume des doigts entraîne celui de la portion palmaire, où sont contenus leurs muscles moteurs, et le rapport de la longueur totale à leur longueur propre diminue progressivement à mesure qu'augmente le volume du membre. De même, le rapport de la longueur de la pince à celle du carpe, qui est de 1,44 chez les ♂ *gibberosus*, monte à 1,83 chez le spécimen d'Hogoleu, à 2,4 chez celui de Tongatabu, cet article ne suivant pas l'accroissement de la portion distale du membre. Il en est de même du méropodite.

Quant aux maxillipèdes externes, l'article basal est énorme, il atteint l'extrémité du carpocérite; l'article distal dépasse le scaphocérite de toute la longueur de celui-ci. Enfin, ces appendices se terminent en pointe et ne portent aucune épine. Ils répondent à la forme que de Man considère comme typique pour *Saron marmoratus* et qui, en réalité, se relie par les transitions les plus ménagées à celle de *gibberosus*.

Le type de H. M. Edwards (*fig.* 2, 15), très bien conservé, est des plus instructifs à cet égard. Il diffère peu du précédent, mais les deux pinces de la première paire sont présentes. Elles sont très symétriques, contenues 5,5 fois dans la longueur totale, et leurs proportions sont les suivantes :

$$\text{doigts, } 1\text{; longueur totale, } 2{,}73\text{; hauteur, } 0{,}9\text{; } \frac{\text{longueur totale}}{\text{carpe}}\text{, } 2{,}2.$$

Les maxillipèdes externes, semblables comme longueur à ceux du spécimen précédent, sont très remarquables par leur armature (*fig.* 2, 16). Ils s'effilent en une pointe conique obtuse, régulièrement atténuée et portant des bouquets de soies presque jusqu'à l'extrémité. On y découvre de plus trois petites épines répondant aux dernières de la série normale, mais très espacées. Rien ne saurait mieux mettre en évidence le mode acrogène de l'allongement des maxillipèdes et le mécanisme de la disparition graduelle des épines.

Il ne manque vraiment aucun terme à cette disparition. Sur un beau spécimen de Viti, où les pinces ont le même volume que chez le type, les deux maxillipèdes sont inégaux, l'un paraît avoir été cassé et s'être cicatrisé en pointe mousse, le second s'atténue en pointe conique, mais porte encore une épine (*fig.* 2, 18).

Des îles Fidji (Filhol) sont quelques spécimens très intéressants. Deux ♂ sont des *gibberosus*, s'écartant toutefois de la normale par les pinces de la première paire déjà volumineuses. Elles sont

égales chez l'un, contenues 7 fois dans la longueur du corps, asymétriques chez le second, où la plus grande est semblable à celles du précédent. Les maxillipèdes externes sont un peu anormaux également, en ce qu'ils atteignent l'extrémité du scaphocérite.

Sur un autre ♂, les maxillipèdes dépassent cette longueur du tiers de leur article distal, et l'extrémité est déjà notablement atténuée, *surtout sur l'un des deux appendices*. Les pattes de la première paire manquent.

Enfin, le dernier spécimen est le seul que j'aie vu répondre rigoureusement à la description de de Man relative à *marmoratus* (description non conforme au type, ainsi qu'on l'a vu), en ce que les maxillipèdes sont absolument dépourvus d'épines (*fig.* 2, 20). Ils sont d'une longueur démesurée, leur article distal ayant à lui seul 1,7 fois la longueur du rostre. Les pinces de la première paire sont énormes également, un peu asymétriques. La plus grande est contenue un peu moins de 4 fois dans la longueur totale, et leurs proportions sont les suivantes (*fig.* 2, 19) :

$$\text{doigts, 1 ; longueur totale} \left\{ \begin{matrix} 2{,}7 \\ 2{,}6 \end{matrix} \right. \text{hauteur} \left. \begin{matrix} 0{,}53 \\ 0{,}83 \end{matrix} \right\} \frac{\text{longueur totale}}{\text{carpe}}, 2{,}6$$

Si l'on remarque que les plus grands ♂ du type *gibberosus* mesurent 37 millimètres et le plus grand *marmoratus* 39 millimètres (sans le rostre), alors qu'en considérant une seule dimension, la longueur, celle du maxillipède entier et celle du membre entier de la première paire passe de 1 à 2, 5 environ, il sera difficile de trouver un exemple plus étendu des variations dans les caractères sexuels secondaires d'une espèce. Le rapport des poids du membre de la première paire, dans les deux spécimens cités, est égal à $\frac{146^{mg}}{15{,}3^{mg}} = 9{,}5$.

Saron neglectus de Man est parfaitement distinct de l'espèce précédente. Je rappelle ici les différences énumérées par de Man : rostre généralement plus court, dents terminales plus rapprochées, hauteur plus grande de la lame rostrale, base brusquement élargie, non sillonnée latéralement, bord du quatrième pléosomite régulièrement courbé en S quand on le regarde de côté, pince de la deuxième paire avec un bord coupant serreté, la paume égale en longueur aux doigts, légèrement plus longue que le carpe, une seule épine sur les méropodites des troisième et quatrième paires de pattes (*fig.* 1, *n* 1, *n* 2, *n* 5, *n* 7).

Je crois pouvoir ajouter les remarques suivantes :

Les maxillipèdes externes sont différents comme armature distale, ceux de *S. neglectus* sont moins larges à l'extrémité, leurs épines plus faibles et généralement moins nombreuses (*fig.* 1, 4). Les pinces de la première paire ont des proportions différentes, les doigts étant plus courts : doigts, 1 ; longueur totale, 3,9 à 4 ; hauteur, 1 à 1,07. Le carpe ne porte plus d'appareil nettoyeur (*fig.* 1. *n* 6), au moins chez les ♂.

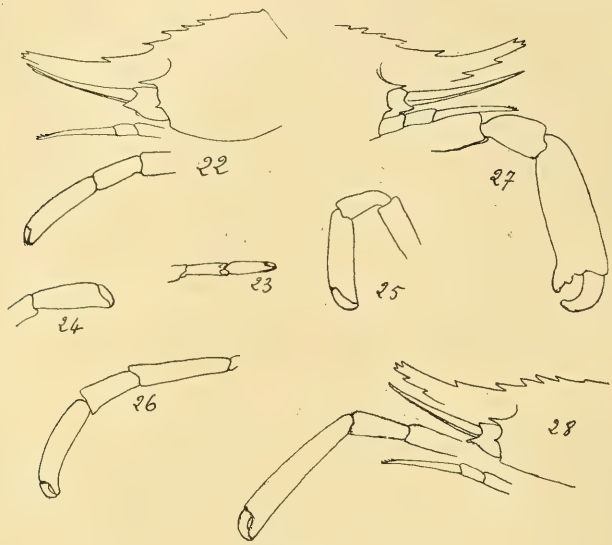


Fig. 3.

22, ♂ *neglectus* ; — 23, pince de la 1re paire d'une ♀ de même taille ; — 24, 25, 26, pinces de la 1re paire de ♂ *neglectus* ; — 27, ♂ *neglectus* de Madagascar ; — 28, ♂ *neglectus* de Nouvelle-Calédonie.

Sur la deuxième paire, le méropodite est indivis et, si le bord coupant de la pince est serreté, il est aussi tout à fait latéral au lieu d'être médian comme chez le *S. gibberosus* (*fig.* 1, *n* 5, *n* 5').

Les pattes des paires suivantes sont plus robustes, y compris le dactyle, qui a le plus souvent 3-4 griffes surnuméraires, alors qu'on en trouve d'ordinaire 5 chez le *S. gibberosus* (et même 6). Le méropodite est 5,6 fois plus long que large, et le propodite 7,5 fois (*fig.* 1. *n* 7 et 8). Le telson est un peu plus échancré à son bord postérieur (*fig.* 1, 3).

Les ♀ présentent encore un vestige de l'appareil nettoyeur sur le carpe de la première paire. A part les caractères des pleurons abdo-

minaux et des pléopodes, c'est la différence sexuelle la plus marquée d'avec les ♂ normaux *neglectus*.

Parmi les trois ♂ que j'ai rapportés de Djibouti, un se montre nettement aberrant par le volume d'une pince. Elle mesure 1/8 de la longueur totale (rostre toujours exclu) au lieu de 1/10 et même 1/12 chez les ♀ (les deux autres ♂ n'ont plus leurs pinces). L'appendice dépasse le rostre en avant. Son opposé atteint seulement la longueur du rostre. Les proportions des pinces sont les suivantes :

$$\text{doigts, } 1\text{; longueur totale } \left\{ \begin{matrix} 5{,}6 \\ 6{,}75 \end{matrix} \right. \text{ hauteur } \left\{ \begin{matrix} 1{,}25 \\ 1{,}37 \end{matrix} \right..$$

La brièveté des doigts étant encore beaucoup plus marquée que chez les ♀, vis-à-vis du *S. gibberosus* (*fig.* 3, 22, 23).

De Madagascar, une série intéressante, due, comme celle du *S. gibberosus*, à M. A. Grandidier, comprend trois ♀ et quatre ♂. De ces derniers, l'un n'a pas de pinces, le second n'en possède qu'une seule, contenue 5 fois dans la longueur totale et remarquable par l'allongement de la paume et du méropodite. Elle a pour proportions (*fig.* 3, 26) : doigts, 1 ; longueur totale, 6 ; hauteur, 1, 12. Le méropodite paraît suivre toujours l'allongement de la pince, le carpe demeurant court. Les maxillipèdes restent de longueur normale.

Un autre ♂ est pourvu aussi d'une seule pince, notablement plus grande, puisque contenue seulement 4,3 fois dans la longueur totale, avec des proportions plus massives : doigts, 1 ; longueur totale, 4, 7 ; hauteur, 1, 3 (*fig.* 3, 25).

Enfin, un dernier spécimen, très entier, est pourvu de deux pinces énormes, contenues 2,8 fois seulement dans la longueur totale (*fig.* 3, 27). Leur volume rappelle celui des *S. marmoratus* les plus typiques, mais leurs proportions sont bien différentes : doigts, 1 ; longueur totale, 4,7 ; hauteur, 1, 25 (au lieu de 1 ; 2, 7 ; 0, 93 chez les *S. marmoratus* de Fidji). La brièveté des doigts et la forme étroite de la paume restent les caractéristiques de l'espèce, aussi clairement que chez les specimens normaux.

De Nouvelle-Calédonie (M. Balansac), j'ai examiné une ♀ et deux ♂, ces derniers pourvus chacun d'une seule pince. Celle-ci est contenue 4, 5 fois dans la longueur totale chez un des ♂; 2,6 seulement dans l'autre, et cette dernière pince (*fig.* 3, 28) est remarquable par son allongement : doigts, 1 ; longueur totale, 7,3 ; hauteur, 1, 2, alors que la première, où ces chiffres sont 1; 3, 8 ; 1, est de proportions normales. Ici encore, le méropodite égale la pince

en longueur, et les maxillipèdes externes sont restés normaux.

Non seulement les deux espèces sont bien distinctes, mais les ♂ de chacune d'elles évoluent dans des directions différentes, accentuant les différences initiales.

Les propositions que j'énonçais au début sont donc, je crois, amplement démontrées par les séries si graduées de spécimens qui viennent d'être énumérées.

Les deux exemples fournis par les espèces du genre *Saron* font immédiatement penser aux cas de dimorphisme des ♂ que G. Smith, en particulier, a très complètement étudiés chez les Inachidés et les Tanaïdés de Naples [1].

On sait que ce dimorphisme, suivant l'excellente définition de Smith, consiste en une relation quantitative entre la taille et le degré de développement des caractères sexuels secondaires. Ce rapport est plus élevé chez les ♂ de grande taille, par suite du développement exagéré des appendices ou autres parties du corps considérés comme supports desdits caractères.

Si l'espèce ne s'accroît plus après la puberté, ce qui est le cas des Insectes, le dimorphisme est dit par Smith définitif, et facultatif dans le cas des Crustacés, dont la croissance continue à travers un nombre de mues plus ou moins élevé.

Chez les *Inachus mauritanicus* et *thoracicus* par exemple, on distingue :

1° Des *low* ♂ devenus mûrs de très bonne heure, sans doute par des conditions favorables de la vie larvaire, et montrant par suite de façon précoce la forme renflée des pinces de la première paire. Mais, comme il faut choisir entre la reproduction et la croissance, ces ♂ devront, pour accroître leur taille, passer par un état de :

2° *Middle* ♂, dont les pinces plates et faibles rappellent celles des ♀. Ils sont alors, comme dit Smith, dans un état de semi-hermaphrodisme, leurs glandes génitales sont très réduites et non-fonctionnelles. Puis, une plus grande taille atteinte, les glandes génitales peuvent reprendre leur activité et une mue subséquente amène les spécimens à l'état de

3° *High* ♂ dont les caractères sexuels secondaires, les pinces en particulier, sont aussi développés que possible.

Quand on dresse une courbe de fréquence des spécimens à pinces renflées, les « middle ♂ » étant exclus, en portant les tailles en

[1] 1905, G. Smith, *Mith. Zool. St. Neapel*, Bd. 17, H. 3, p. 312-339.

ordonnées et le nombre des ♂ en abscisses, cette courbe est très nettement bimodale. Chez *Inachus scorpio*, ses sommets sont respectivement à 13 et 22 millimètres (longueur du céphalothorax) Quand on dresse cette courbe pendant la saison génitale, au milieu de l'été, les ♂ moyens y font presque défaut, alors qu'ils sont la majorité en hiver.

Il existe chez les Oxyrhynques au moins un autre cas qui me semble tout à fait comparable. C'est celui de l'*Eurypodius Latreillei* Guérin que j'ai signalé des 1900 (1). Miers, à vrai dire, avait distingué dans cette espèce deux variétés α et β, la première à pinces plates, la seconde à pinces renflées. J'ai montré que la prétendue variété β correspondait seule aux ♂ normaux, les ♂ α étant des individus « féminisés » montrant un « hermaphrodisme virtuel ». Les *Eurypodius* que je mesurai provenaient de l'expédition de la Romanche. Les glandes génitales n'en furent pas examinées, je remarquai seulement que ces ♂ féminisés se rapprochaient encore des ♀ par un curieux détail, à savoir le revêtement de corps étrangers plus abondant que celui des ♂ à fortes pinces. La courbe de fréquence ne pourrait être que très imparfaitement bimodale, les petits exemplaires étant mal représentés dans les matériaux que j'ai mesurés et le nombre total d'exemplaires trop faible (43). Il est visible que les mâles α, que j'ai désignés par des termes si voisins de ceux de Smith, correspondent aux « middle ♂ » des *Inachus*

Je serai moins affirmatif pour les ♂ de *Palemon lar* Fabr. J'ai rassemblé les diverses mensurations données par les auteurs, et les miennes propres, en un graphique. Sur les spécimens très grands, la courbe de croissance des pinces de la deuxième paire s'éloigne très rapidement de celle du corps, et il y a, d'autre part, des spécimens « féminisés » chez lesquels les pinces sont trop courtes relativement au corps (1). L'ensemble peut s'interpréter comme « low », « middle » et « high » ♂, mais, comme les glandes génitales n'ont pas été examinées, que des spécimens avec des pinces en voie de régénération peuvent paraître « féminisés », comme les pinces des très grands ♂ ont un aspect sénile dû aux tubercules et aux épines émoussés, je ne sais si le cas de *P. lar* doit être rapproché de celui des Inachidés ou de celui des *Saron*.

Chez *Gnathia maxillaris*, d'après G. Smith, il y aussi parmi les ♂ fertiles des spécimens « low » et « high ». Ils présentent des diffé-

(1) 1900, H. Coutière, *Bull. Mus. H. Nat.*, VI, p. 240.
(2) 1901, H. Coutière, *Ann. Sc. Nat.*, XII, p. 296, pl. XII, *fig.* 26-28.

rences de taille énormes (1 à 8 millimètres), et leur courbe de fréquence, au temps de la reproduction, est bimodale. De plus, vers la taille de 4 millimètres, se trouverait, pour les larves donnant naissance à des ♂, une période critique de croissance, certaines d'entre elles n'arrivant jamais à être pubères. Elles représenteraient assez bien les « middle ♂ », dont l'état peut être interprété comme une sorte de régression vers l'état larvaire, mais les ♂ de *Gnathia* cessent de croître après la puberté, et le dimorphisme est définitivement acquis.

Après avoir dégagé la laborieuse synonymie de *Leptochelia dubia*, — dont F. Muller avait déjà signalé les ♂ dimorphes, — G. Smith montre que le rapport entre les longueurs extrêmes du corps (2 à 4 millimètres) est beaucoup moindre que celui entre les dimensions extrêmes des pinces ($0^{mm},1$ à $0^{mm},7$). Ici encore, les ♂ cessent de croître après la puberté, et il n'est pas question de « middle » ♂ ; la période qui pourrait leur correspondre se passe pendant la vie larvaire.

G. Smith [2], étudiant à Naples deux Orchesties, *O. gammarellus* et *O. Deshayesi*, a trouvé chez ces espèces une preuve très remarquable de la dégradation sexuelle qui sépare les périodes d'activité : en novembre, plus de la moitié des ♂ de *O. Deshayesi*, de toutes tailles, montrent des œufs dans leurs testicules, ce qu'on ne trouve jamais au moment de la saison d'été, où ces glandes fonctionnent activement. *O. gammarellus* se comporte de même et, de plus, en certaines localités favorisées, où la reproduction ne subit pas de temps d'arrêt (les ♀ s'y montrent toujours ovées), les ♂ ne montrent jamais d'hermaphrodisme.

Barrois a montré, chez l'*O. Deshayesi*, une énorme variation du volume de la pince du ♂ (deuxième gnathopode). Mais il s'agit ici du passage de l'état immature à l'état de maturité et non plus de variations entre ♂ adultes [1]. G. Smith ne parle pas de ce détail en relatant l'hermaphrodisme temporaire de l'espèce.

G. Smith tire de ces faits, comme de ceux relatifs à la castration parasitaire, des conclusions extrêmement ingénieuses et convaincantes sur les différences réelles entre les sexes et sur les véritables effets de la castration. Celle-ci ne produit pas des résultats comparables dans les deux sexes. Si elle atténue les caractères sexuels secondaires chez les ♀, jamais elle ne fait apparaître chez celles-ci les caractères du sexe opposé, alors que c'est là chez les ♂ un résultat

(1) 1906, G. Smith, *Fauna und Flora Neapel.*, 29, Rhizocephala.

(2) Reproduit dans A. Patience, *The Glasgow natur.*, 1. 4, p. 124, *fig.* 4-6, 1909. Voir aussi : E. W. Sexton, *P. Z. S. London*, p. 849, 1909, avec bibliographie très complète.

constant, pouvant aller jusqu'à l'hermaphrodisme complet. Depuis, Pott a confirmé ces faits chez les Pagures. Smith arrive, en suivant ces déductions jusqu'à leurs conséquences ultimes, à se demander si toutes les espèces hermaphrodites ne sont pas constituées uniquement par des ♂ (d'où la protandrie si fréquente), mâles dont la dégradation, par le parasitisme ou la fixation, a consisté à prendre par surcroît le sexe ♀. Il pense, en outre, que le développement du sexe et des caractères sexuels secondaires, indépendants dans une large mesure, doivent être l'un et l'autre fonction d'un troisième facteur, d'ordre chimique, qui ferait la matière vivante des deux sexes originellement différente et lui imprimerait par suite la manière propre de se comporter. C'est une hypothèse très plausible, contre laquelle il n'est guère d'objections que celle, fondamentale, de sa preuve (1).

Les autres cas de dimorphisme cités par Smith sont ceux d'*Orchestia Darwini*, d'après F. Müller, insuffisamment prouvés, et ceux tirés des Insectes, d'après Bateson et Brindley (*Forficula auricularia*, *Xylotrupes gideon*, *Lucanus cervus* et beaucoup d'autres espèces chez lesquelles les caractères sexuels secondaires des ♂ sont très marqués). Il faut remarquer qu'il s'agit ici de dimorphisme définitif et que la courbe de fréquence est tantôt unimodale, tantôt bimodale.

Chez les Crustacés, il faut encore citer le cas classique des *Cambarus*, rapporté par Hagen et surtout par Faxon. Mais, ici, les ♂ ne sont pas « low » et « high » mais bien « middle » et « high », c'est-à-dire qu'ils présentent ou non leurs caractères sexuels secondaires, suivant les périodes.

Peut-être trouverait-on aussi chez les *Cambarus* des « low ♂ » dans les premiers temps du fonctionnement sexuel, comme chez les *Inachus*.

Récemment, Wollebœck (2), étudiant *Pandalus annulicornis*, a trouvé chez les ♂ de cette espèce deux aspects des pléopodes, rappelant d'assez près le cas des *Cambarus*. Il s'agit de l'*appendix masculina* du premier et du deuxième pléopodes qui est tantôt long et rigide, tantôt très court, ridé et inconsistant. Ce dernier cas s'observe toujours chez des ♂ de grande taille et coïncide avec des testicules réduits. Il se peut que ces ♂ soient des « middle ♂ » et récupèrent plus tard leur condition, en grandissant encore, car on connaît des spécimens, rares à la vérité, d'une taille bien supérieure.

Le cas des *Saron* n'est en réalité comparable à aucun des précédents. On n'y saurait distinguer ni « low », ni « middle » ♂. Tous

(1) Smith l'a fortifiée depuis en étudiant le mécanisme de la castration chez les *Inachus* sacculinés (*Quat. J. of. micr. Sc.*, 54, 4, p. 577, 55, 2, p. 225, 1910).

(2) 1908, Wolleboeck, *Bergen Mus. Aarborg*, 12, p. 65-67, *fig.* 5-6.

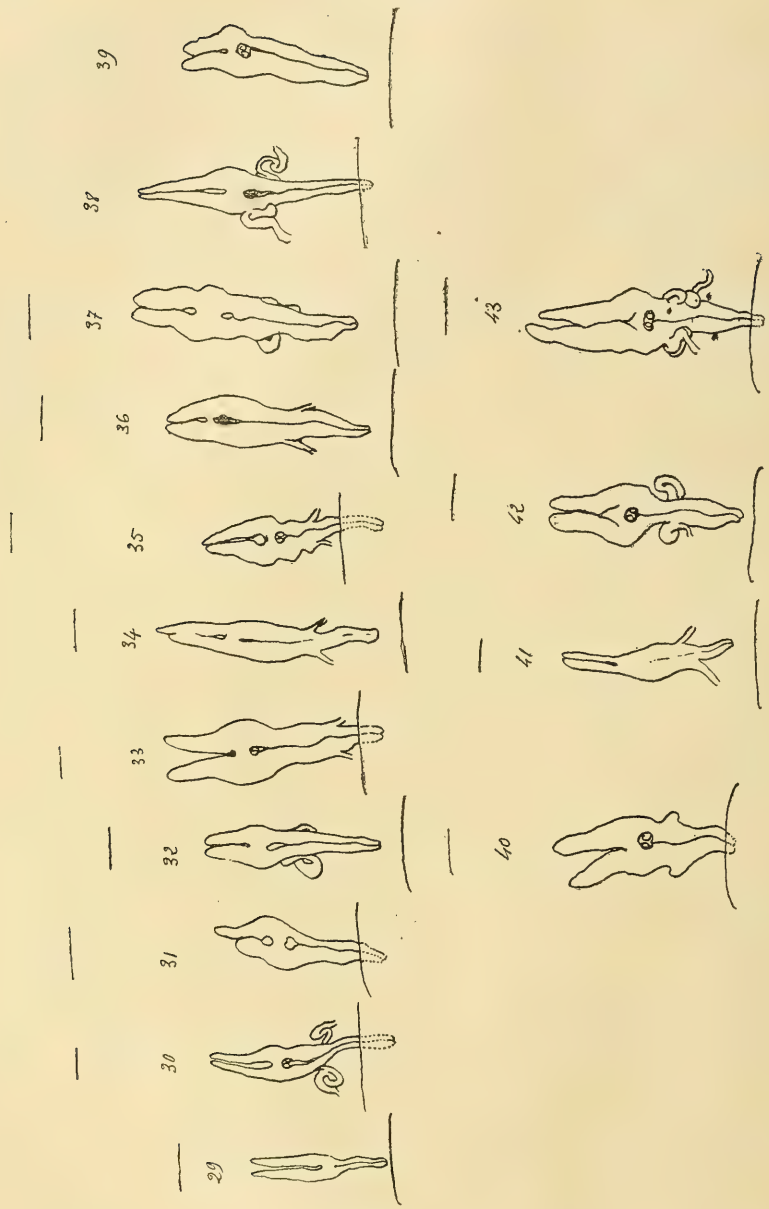


Fig. 4.

29, 32, 33, 34, 36, 37, se rapportent à des ♂ *gibberosus* de Djibouti; — 30, à un ♂ *gibberosus* de Fidji; — 31, à un ♂ aberrant de Djibouti (*fig.* 2, 21); — 38, ♂ *marmoratus* de Viti ; — 35, 39, ♂ *marmoratus* de Fidji; — 40, 42, 43, ♂ *neglectus* à pinces un peu anormales; — 41, ♂ *neglectus* à très grandes pinces de Madagascar.

les spécimens de petite taille et la majorité des ♂ adultes ont des pinces et des maxillipèdes réduits, comme ceux des ♀, mais il s'y mêle, d'une façon qui paraît tout à fait accidentelle et déréglée, des ♂ chez lesquels ces appendices présentent des degrés très variables de gigantisme. Cette absence de règle, à la fois dans la fréquence des deux sortes de spécimens et dans les attributs de ceux qu'on pourrait qualifier de « high », me paraît être une présomption que les collections que j'ai étudiées représentent suffisamment, en raccourci, les proportions réelles des uns et des autres dans la nature.

La différence dans la position du problème, comparé au cas des *Inachus*, a fait que j'ai examiné le plus grand nombre des spécimens au point de vue des glandes génitales. Malgré un séjour en alcool qui dépasse un siècle pour certains, ces organes sont assez bien conservés pour qu'il soit d'ordinaire facile de les découvrir et de les dessiner en place. Les résultats de cet examen, assez inattendus, accentuent encore les divergences entre les deux cas. Tous les ♂ dont les maxillipèdes et les pinces sont réduits, et semblables à ceux des ♀, possèdent des glandes génitales normales. Elles s'étendent en avant jusqu'à la seconde épine de la rangée dorsale médiane, en arrière jusque dans le second pléosomite, avec des canaux déférents souvent contournés et volumineux à l'origine.

Mais, sur les spécimens à pinces et maxillipèdes du type *marmoratus*, on trouve régulièrement des testicules réduits. Autant que l'on peut en juger par le simple examen macroscopique, le développement de ces glandes paraît inversement proportionnel à celui des appendices « géants ». J'ai réuni sur une même ligne [1] tous les dessins, afin de rendre la comparaison plus facile et plus frappante (*fig.* 4). Il est aisé de voir que les testicules des spécimens 35, 38 et 39 sont plus petits que les autres, en comparaison de la taille des spécimens, et que le plus réduit de tous est celui du spécimen 39, un très grand ♂ de Fidji avec des pinces et des maxillipèdes démesurés.

Les résultats ne sont pas moins nets en ce qui concerne *S. neglectus*. Tous les ♂ que j'ai examinés présentaient des pinces majorées à des degrés divers par rapport à celles des ♀, mais le spécimen n° 41, dont les pinces sont énormes, a des glandes très réduites (*fig.* 3, 40-43).

Cette relation n'est visible qu'aux extrémités des séries, malheureusement trop peu nombreuses ; les spécimens qui montrent seule-

[1] Les traits horizontaux indiquant la longueur du cephalothorax (rostre exclus), ne sont pas venus sur les croquis 38, 39. A l'échelle de ces figures, ils doivent être distants de 51 et 57^{mm} respectivement.

ment une légère exagération dans la taille de leurs appendices ont des glandes de volume normal. Il me semble que l'on peut interpréter cette relation comme un caractère de sénilité (1) ; les individus qui les possèdent sont parvenus au terme de leur âge. C'est bien encore une forme de l'antagonisme entre la reproduction et la croissance, mais tout autre que chez les Inachidés. J'étais déjà arrivé à cette conception d'un aspect sénile chez les très grands spécimens de *Palemon lar*, et il me semble que cette notion devrait être envisagée plus fréquemment.

Si dans la nature peu d'individus meurent de vieillesse, beaucoup certainement arrivent à un âge avancé avant de rencontrer la mort, sous forme d'un estomac ou d'un milieu hostiles. La sénilité peut ne pas se traduire par un caractère marquant, mais quand elle le fait, l'exception n'est pas plus insolite que les cas de dimorphisme présentés par les Inachidés.

Un autre ordre de considérations rend très intéressant le problème que posent les Hippolytidæ à ♂ polymorphes. C'est la parenté certainement très grande qui les unit aux Alpheidæ, et le fait que le grand volume des pinces, exceptionnel chez ceux-là, est la règle chez ceux-ci. Je rappelle qu'il existe chez les *Saron* un détail dont j'ai le premier fait ressortir la singularité, bien qu'il ait été noté par Sp. Bate chez les *Nauticaris*, extrêmement voisins des *Saron*.

Le sixième pléosomite présente une paire de pièces triangulaires articulées, occupant la place des pleurons. Il n'est, je crois, qu'une explication plausible de ce rare caractère : c'est le vestige d'une disposition présente chez les Lophogastridæ, où le sixième pléosomite est double ainsi que ses pleurons. Quoi qu'il en soit, il n'est présent, à part les *Saron*, que chez les Alpheidæ, et précisément chez ceux qui rappellent le plus étroitement les Hippolytidæ (*Athanas*, *Betæus*). Tous les *Athanas* présentent un dimorphisme sexuel, les pinces des ♂ étant plus volumineuses ; assez faible chez l'*A. nitescens* de nos côtes, ce dimorphisme atteint un degré extrême chez l'*A. dimorphus* Ortmann, dont les ♂ portent en avant d'eux d'énormes pinces, repliées en partie sous le corps. Les pinces de beaucoup d'*Athanas*, de *Betæus æquimanus*, rappellent tout à fait celles des *Saron* et des *Alope:* même aspect dépoli, même forme

(1) Il arrive qu'elle se présente chez des spécimens qui ne sont pas les plus grands (sp. 41 de *S. neglectus*), mais la taille et l'âge ne sont pas forcément liés, la vie larvaire peut créer des différences très notables, se maintenant en grande partie par la suite. L'expérience de l'élevage du Homard américain l'a montré très nettement.

du carpe, même armature de saillies et de soies. Les maxillipèdes épineux des *Saron* et des *Alope* se retrouvent chez *Synalpheus*, les maxillipèdes de *S. neglectus* sont ceux de la plupart des Alpheidæ, leur développement excessif se retrouve chez *Automate*. Et je laisse de côté le fait que la réduction du rostre, très générale chez les Alpheidæ où elle va jusqu'à sa disparition, est en pleine réalisation, si l'on peut dire, chez les Hippolytidæ. On y trouve tous les degrés, depuis les *Saron* où les indentations exagérées du rostre indiquent sa décadence, jusqu'aux *Ogyris* où il est plus réduit même que chez les Alpheidæ tels qu' *Athanas*.

Il n' est pas jusqu'à l'asymétrie des pinces qui n'ait tendance à se montrer chez les *Saron*, aussitôt que les membres deviennent volumineux.

Si l'on suppose qu'à un moment donné l'ensemble des Eucyphotes ne comportait pas d'Alpheidæ, on pourrait comprendre la différenciation de cette famille, á partir des Hippolytidæ, par le mécanisme que l'on voit actuellement en activité chez les *Saron*. La tendance au volume exagéré des pinces de la première paire, très marquée chez ces formes, mais freinée, semble-t-il, par l'activité sexuelle, au point de ne pouvoir se manifester que lorsque celle-ci s'éteint, cette tendance se serait étendue aux deux sexes, bien qu'inégalement, et se serait manifestée de façon précoce, sans interférer avec la reproduction.

Beaucoup de Décapodes présentent, à côté d'espèces nageuses à pattes grêles, des formes lourdes, d'allure rampante. Tels sont les *Palemon* vis-à-vis des *Léander*, les *Pontonia* vis-à-vis des *Coralliocaris*, les Sténopidés vis-à-vis des Pénéides, et, bien que la distance soit beaucoup plus grande, le groupe des *Astacura* vis-à-vis des mêmes Pénéides. Le problème de leur différenciation se pose comme celui des Alpheidæ et les mêmes explications peuvent être valables. Le groupe entier des Décapodes montre cette tendance à la « céphalisation », qui réduit l'abdomen et fait prédominer une paire de membres préhenseurs à portée des organes des sens. Or, à mon sens, les Macroures Eucyphotes effectuent en raccourci, pour leur propre compte, la même évolution, qu'on peut surprendre dans la plupart des familles du groupe et dont l'ensemble Hippolytidæ-Alpheidæ montre l'image la plus parfaite. Et si cette évolution est très loin d'avoir l'ampleur de celle qui a fait un Homard d'un Pénéide, elle est proportionnelle à l'importance même du groupe des Eucyphotes, rameau latéral du tronc des Décapodes ayant épuisé, beaucoup plus rapidement que ce tronc même, ses « possibilités » évolutives.

SUR LA DISSOCIATION DE LA MOLÉCULE D'IODE ;

Par Camille MATIGNON.

V. et C. Meyer[1] ont attiré depuis longtemps l'attention sur les variations que présentent les densités du chlore, du brome et de l'iode aux températures élevées. L'étude de ces variations a été reprise, d'une façon approfondie dans le cas de l'iode, par MM. Crafts et Meier[2] et par M. Troost[3].

Il résulte de leurs recherches, que la densité de l'iode diminue progressivement à partir de 600° à 700° pour atteindre au delà de 1.500° une nouvelle valeur constante, moitié de la précédente[4]. En outre, pour une même température, la densité diminue en même temps que la pression. Ces faits reçoivent une interprétation rationnelle en admettant que la molécule d'iode diatomique se dissocie à partir de 700° en iode monoatomique. La dissociation est complète sous la pression atmosphérique au delà de 1.500°. Entre 600° et 1.500°, la vapeur d'iode est constituée par un mélange de deux vapeurs, l'iode monoatomique et l'iode diatomique.

Si l'examen des faits expérimentaux conduit un grand nombre de chimistes à considérer la dissociation de la molécule d'iode comme un fait bien établi et indiscutable, il en est un grand nombre d'autres qui ne voient là qu'une simple hypothèse et non une réalité.

Il est cependant facile d'apporter d'autres preuves de cette décomposition certaine de la molécule d'iode.

$$I^2 \gtrless 2I.$$

Le passage de l'iode diatomique à l'iode monoatomique se fait avec augmentation de volume ; il en résulte, d'après la loi du déplacement de l'équilibre, qu'une diminution de pression à température constante doit favoriser la dissociation et par suite conduire à une densité plus faible, conséquence en parfait accord avec les résultats des expériences de M. Troost.

(1) *Berichte*, p. 394 ; 1880.
(2) *Berichte*, p. 1010 et 1103 ; 1880 ; — *Comptes rendus*, t. XCII, p. 39 ; 1881.
(3) *Comptes rendus*, t. XCI, p. 54 ; 1880 ; et t. XCV, p. 30 ; 1882.
(4) Voir aussi : Biltz et Meyer, *Berichte*, t. XXII, p. 725 ; 1889.

Il est possible de vérifier quantitativement une autre conséquence de la décomposition de la molécule d'iode. La dissociation se traduit par l'équation chimique :

$$I^2 \rightleftharpoons 2I.$$

Appliquons à cet équilibre la loi d'action de masse. Soit p_1 la pression de la vapeur d'iode monoatomique, p_2 celle de l'autre vapeur diatomique et P la pression totale du système. Les densités théoriques pour les deux espèces d'iode sont respectivement 4,4 et 8,8. Nous avons :

$$\frac{p_1^2}{p_2} = K.$$

D'après la loi d'action de masse, le rapport du carré de la pression de I à la pression de I^2 doit rester constant à une même température.

D'autre part, on a les relations suivantes :

$$p_1 + p_2 = P,$$
$$d = 8{,}8\,\frac{p_2}{P} + \frac{8{,}8}{2}\,\frac{p_1}{P}.$$

En éliminant p_1 et p_2 entre les trois relations précédentes, on établit que le rapport

$$\frac{P\,(8{,}8 - d)^2}{2\,d - 8{,}8} = K$$

doit rester constant à une même température.

Appliquons ceci aux expériences de Crafts et Meier [1], qui ont déterminé les densités de la vapeur d'iode à différentes températures et sous différentes pressions. Leurs résultats sont traduits par quatre courbes donnant la densité en fonction de la température aux pressions suivantes : $0^{atm},4$; $0^{atm},3$; $0^{atm},2$ et $0^{atm},1$.

J'ai déduit de ces graphiques les valeurs suivantes et j'ai calculé les valeurs de K correspondantes.

[1] *Comptes rendus*, t. XCII, p. 41 ; 1881.

Température 1.100°

Pression atm	Densité	K
0,4	6,43	0,56
0,3	6,24	0,54
0,2	6,00	0,55
0,1	5,40	0,57

Température 1.050°

0,4	6,80	0,33
0,3	6,55	0,35
0,2	6,28 (1)	0,33
0,1	5,67	0,38

Température 1.200°

0,4	5,86	1,1
0,3	5,60	1,2
0,2	5,36	1,2
0,1	4,92	1,4

Température 800°

0,4	8,52	0.01
0,3	8,24	0,01
0,2	7,88	0,02
0,1	7,43	0,02

Ces quatre tableaux fournissent pour une même température, des valeurs de K qui peuvent être considérées comme constantes. Si l'on tient compte des difficultés expérimentales que comporte la détermination de semblables densités à température élevée et sous d'aussi faibles pressions, on sera frappé par la concordance des valeurs de K. Une semblable concordance pour quatre températures distinctes ne peut s'expliquer par une coïncidence fortuite. La variation de densité est donc bien la conséquence d'une décomposition chimique éprouvée par la vapeur d'iode et représentée exactement par l'équation précédente.

(1) Valeur obtenue en corrigeant l'irrégularité présentée en ce point par la courbe d'après le principe de continuité.

Les valeurs de K aux différentes températures sont les suivantes :

800°	0,02
1.050°	0,35
1.100°	0,55
1.200°	1,2

Il est possible de calculer la chaleur mise en jeu dans la dissociation précédente en appliquant la formule de Nerst :

$$q = -\frac{4,571 \times T_1 T_2}{T_2 - T_1} (\log K_2 - \log K_1),$$

où T_1 et T_2 sont les températures absolues correspondant aux valeurs K_1 et K_2.

$$K = \frac{C_2}{C_1^2},$$

où C_1, C_2 sont les concentrations en molécules-grammes (par litre) à l'équilibre.

A 1.200°, c'est-à-dire 1.473° absolus, nous avons :

Pression.....	$0^{atm},2$
Densité.....	5,36
Température.....	1.473°

On en déduit pour I^2 et I les pressions respectives de $0^{atm},0436$ et $0^{atm},1564$, et pour C_1 et C_2 :

$$C_2 = \frac{273 \times 0,0436}{22,32 \times 1473},$$

$$C_1 = \frac{273 \times 0,1564}{22,32 \times 1473},$$

par suite

$$K_2 = \frac{C_2}{C_1^2} = 214,7.$$

A 1.100° avec les données suivantes :

Température.....	1.373°
Pression.....	$0^{atm},2$
Densité.....	6,0

On a de même pour $K_1 = 505,1$; par suite

$$q = 34.350 \text{ calories}$$

ou en grandes calories

$$Q = 34^{cal},35.$$

La chaleur de dissociation de la molécule I^2 est ainsi de $-34^{cal},35$ pour une température voisine de 1.150°.

On trouve de même

$$\begin{array}{ll} -31^{cal},5 & \text{vers } 1.075^\circ \\ -33 & \quad\quad\;\; 1.100^\circ \end{array}$$

En résumé, dans la dissociation de la molécule d'iode diatomique en deux molécules monoatomiques, il y a une absorption de chaleur voisine de 33 calories.

Cette dissociation n'est pas particulière à la molécule d'iode, elle doit se produire de même pour tous les éléments dont la molécule est polyatomique ; mais elle ne peut être manifestée qu'à des températures d'autant plus élevées que la chaleur de combinaison des atomes est plus grande.

Pour la molécule tétratomique du phosphore, on a pu mettre en évidence le commencement de sa dissociation sans doute en molécule diatomique ; si l'on pouvait poursuivre la mesure de la densité à des températures de plus en plus élevées, on atteindrait sans doute une zone de température pendant laquelle la molécule diatomique serait stable ; puis, en dépassant cette zone, on finirait par atteindre la dissociation de la molécule diatomique en monoatomique.

En tous cas, on doit regarder la dissociation de la molécule d'iode comme un fait positif acquis à la science, et les ouvrages de chimie, aussi bien les ouvrages classiques que les traités spéciaux, ne doivent plus dire aujourd'hui « que la molécule d'iode semble subir une dissociation », mais qu'elle la subit effectivement.

SUR LES OISEAUX SÉDENTAIRES DANS LES BASSINS DU PUNGOUÉ ET DU BAS ZAMBÈZE;

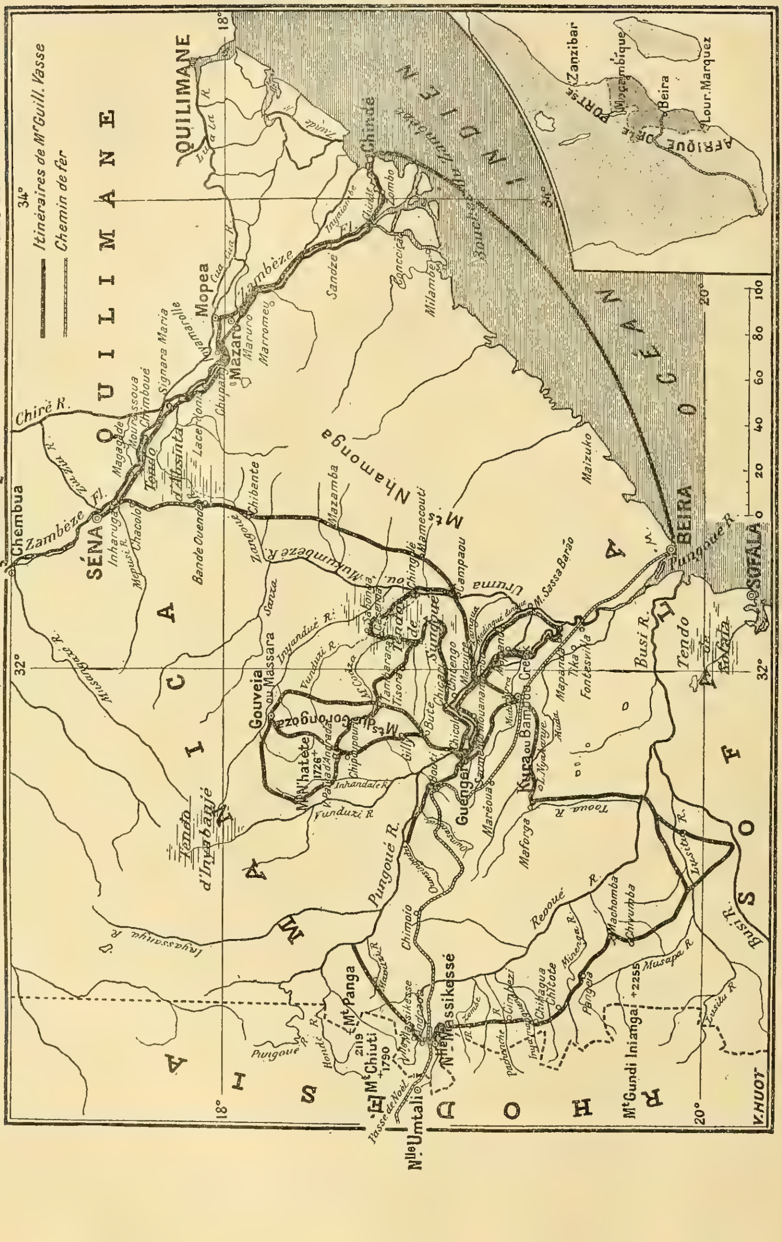
Par A. MENEGAUX.

Les oiseaux que j'ai étudiés proviennent des récoltes faites par M. Vasse dans les vastes régions du Pungoué et du bas Zambèze, encore peu explorées avant lui et dans lesquelles, pendant un séjour de trois années entières (du 30 avril 1904 au 15 mai 1907), il put relever 6.000 kilomètres d'itinéraires nouveaux indiqués sur la carte ci-jointe publiée par la Société de Géographie de Paris. Le bas Zambèze avait déjà été exploré avant lui au point de vue ornithologique par Kirk, Jameson, Alexander, mais, avant M. Vasse, seul Cavendish avait fait des récoltes près de Beira, à l'embouchure du Busi et du Pungoué.

M. Vasse commença ses chasses par Massikessé. Toute la région qui s'étend de cette localité au fleuve Busi est montagneuse et couverte d'une belle végétation. L'altitude y varie entre 900 et 2.000 mètres. Au contraire, le pays compris entre le Mukumbèze, le Tendo (marais) du Pungoué et le fleuve Pungoué est moins élevé, car l'altitude y atteint de 600 à 1.800 mètres. La région, qui est bien irriguée, produit une végétation luxuriante avec de grandes forêts où abondent les lianes à caoutchouc. Plus au nord-est et entre ces deux régions, par conséquent entre Sena, sur le Zambèze, Gouveia, Guengère et le Busi, se trouve une immense plaine, dont l'altitude oscille entre 40 et 100 mètres et qui est inondée dans la saison des pluies. Elle est couverte de bois de Mimosas, de Graminées et de nombreux roseaux. Près du Pungoué on trouve une quantité de sources salées où vivent et nidifient une multitude d'oiseaux aquatiques.

M. Vasse s'est attaché à ne collecter que les petites espèces résidant d'une façon permanente dans le pays ; il a rapporté au Muséum 103 spécimens appartenant à 97 espèces et à 34 familles. Mais le nombre des pièces qu'il a tuées est beaucoup plus grand, il s'elève à 1.559, comme il l'indique dans le livre qu'il a publié sur ses

VOYAGE DE Mr VASSE AU MOÇAMBIQUE 30 AVRIL 1904-15 MAI 1907



chasses au Mozambique. Ce sont des Pigeons verts, des Martins-pêcheurs, des Tourterelles, des Perdrix, des Cailles, des Pintades (ordinaires et vulturines), des Outardes, des Bécassines, des Chevaliers, divers Râles, des Grues couronnées, des Hérons, des Aigrettes, des Crosses, des Marabouts, des Cigognes, des Ibis, des Spatules, des Flamants, des Canards (siffleurs et à caroncule), des Fuligules, des Sarcelles, des Oies noires et de Zanzibar, etc.

Les Aigrettes nidifient dans ce pays en colonies nombreuses, comprenant 1.500 à 2.000 individus; elles établissent leurs héronnières sur les Mimosas (*Acacia girafæ*), tandis que celles des Marabouts sont sur les Baobabs ; leurs colonies sont beaucoup moins nombreuses.

M. Vasse a fait en outre sur les diverses espèces récoltées de nombreuses observations biologiques dont j'ai tenu compte dans ce travail. Il m'a paru utile, en plus de l'aire de dispersion, d'indiquer si les diverses espèces ont déjà été signalées dans les pays circonvoisins, c'est-à-dire dans le bassin du Zambèze, par Alexander, et dans le Mashonaland, par Sowerby et Marshall. Quelques-unes des espèces étudiées avaient déjà été collectées par Cavendish près de l'embouchure du Pungoué, à Beira, en 1899, mais le plus grand nombre est nouveau pour cette région.

I. — Falconidés.

1. Buteo augur (Rüpp.).

Falco (*Buteo*) *augur* Rüppell, *Neue Wirb. Vög.*, p. 38, 44, Pl. 16 (1844) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, I, p. 592 (1901); Sclater, *Birds South Afr.*, III, p. 332, 1903.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude, 23 septtembre 1904. Œil noir, large bordure jaune, bec gris noir, cire jaune, pattes grises (n° 38). Longueur totale, 600 millimètres. N'a pas encore le plumage de l'adulte. Les parties inférieures sont toutes blanches, mais le jugulum porte un assez grand nombre de plumes dont l'extrémité est marquée au milieu d'une tache noire allongée, bordée latéralement par du brun très clair. La tête est gris jaunâtre, la nuque noire et le dos porte un grand nombre de plumes noires à leur extrémité. Un spécimen des Galeries est étiqueté jeune femelle.

Cet oiseau vit aux grandes altitudes ; il est très redouté des Cafres dont il tue les jeunes chevreaux

Il habite le nord-est et l'est de l'Afrique. Sclater (in *Birds South Afr.*, III, p 333) signale, d'après Marshall, un spécimen en plumage noir qui fut tué à Salisbury (Mashonaland).

2. Buteo desertorum (Daud.).

Falco des. Daudin, *Traité.* II, p. 162 (1800).
But. des. Reichenow, *Vög. Afr.*, I, p. 594 (1904); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 333 (1903).
Le *Rougri* Levaillant, *Ois. d'Afr.*, p. 77, pl. 17 (1799)

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude; 17 octobre 1904 (n° 44).

Bec noir, avec cire jaune, pattes jaunes, œil noir à bordure jaune, longueur totale, $0^{m},48$. Les taches brunes que porte le plumage indiquent que c'est un jeune. Les plumes de la poitrine sont roux châtain, celles de l'abdomen sont blanches avec des bandes chatain clair. On trouve aux Galeries du Muséum un individu identique, provenant de Turquie, qui est étiqueté femelle.

Cet oiseau de proie est commun partout. On le rencontre beaucoup plus fréquemment d'octobre à avril, c'est-à-dire pendant les mois du passage des sauterelles. Il accompagne les bandes de sauterelles migratrices et en fait une grande consommation.

Il est doué d'une vue très perçante, et c'est lui qui arrive généralement avant tout autre oiseau de proie sur les cadavres qu'il découvre dans la brume. On peut le voir souvent assister à la curée des vautours, mais comme il est très agile, il dérobe fréquemment le morceau que deux charognards se disputent. Il fait aussi de grands ravages dans les basses-cours.

Habite le nord-est, l'est et le sud de l'Afrique. Localité nouvelle.

3. Aquila wahlbergi Sund.

Aquila wahlb. Sundevall, *Œfvers. K. Vet. Akad. Handl.*, Stockholm, p. 109 (1851); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 396 (1903).
Hieraetus wahlb. Reichenow, *Vög. Afr.*, I, p. 581 (1901).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, dans le Manica, altitude 1.120 mètres ; 8 septembre 1904 (n° 34).

Œil noir à pourtour jaune, bec gris noir avec cire jaune, pattes grises. Longueur totale, 580 millimètres.

Paraît exister dans toute la région éthiopienne. Le type décrit par Sundevall provenait de la « Caffraria Superiori, prope 25° latitude », ce qui correspond au Transvaal occidental actuel. Il a été signalé dans le Mashonaland, par Shelley et Ayres, au Fort Chiquaqua, par Sowerby, près de la baie de Delagoa, par Monteiro.

Marshall le dit commun près de Salisbury (1900, p. 257), dans le Mashonaland.

4. Spizaëtus coronatus (L.).

Falco cor. Linné, *Syst. nat.*, I, p. 124 (1766).
Spiz. cor. Reichenow, *Vög. Afr.*, I, p. 576 (1901); Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 304 (1903).
Le *Blanchard* Levaillant, *Ois. d'Afr.*, I, p. 12, Pl. 3 (1799).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué; 8 juillet 1906.

Bec noir, pattes jaune pâle; œil noir avec bordure jaune clair. Longueur totale, 790 millimètres (n° 102).

Cet oiseau doit être rare, car M. Vasse ne l'a vu qu'une fois. Les Cafres assurent qu'il se nourrit de serpents, d'où le nom qu'ils lui donnent, *Timba nioca*, et qui signifie « celui qui prend les serpents ».

Il paraît habiter les grandes forêts de l'Afrique, au sud du Sahara et de l'Abyssinie. Signalé au Transvaal et au Bechouanaland, par Holub, au Natal, par Ayres, dans la Cafrerie, par Krebs. C'est donc une localité nouvelle.

5. Asturinula monogramma (Tem.).

Falco monogrammicus Temminck, *Pl. Col.*, I, Pl. 314 (1824).
Kaupifalco monogr. Reichenow, *Vögel Afr.*, I, p. 547.
Asturinula monogr. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 327 (1903).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué; 40 mètres d'altitude; 28 avril 1906.

Bec rouge et noir, pattes rouges; œil noir à bordure marron foncé. Nom cafre, *Tchouanga*. Longueur totale, $0^{m},390$.

Redouté des Cafres auxquels il tue quantité de poussins. Le soir, il chasse les gros insectes. Il semble de passage, car il se rencontre par bandes dès les premiers jours de décembre et disparaît en mai.

Il vit du Sénégal et de l'Abyssinie jusqu'au Transvaal et au Natal. Dans le sud-ouest, il paraît être remplacé par une forme peu différente, *Ast. mon. meridionalis* (Hartl.).

Signalé à Salisbury, par Marshall (1900, p. 241), et au Fort Chiquaqua, par Sowerby; à Tete sur le Zambèze (Afrique portugaise), par Alexander (1900, p. 437).

6. Circaëtus cinereus Vieill.

Circ. cin. Vieillot, *N. Dict. H. nat.*, t. XXIII, p. 445 (1818, Sénégal); Reichenow, *Vögel Afr.*, I, p. 571 (1901), et Sharpe, *Handlist*, I, p. 265 (1899).
Cir. pectoralis Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 824 (1903) (partim).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué; altitude 40 mètres; 14 juin 1906. Nom cafre, *Zoumbirra*. Bec noir, pattes grises, iris

jaune. Longueur totale, 700 millimètres ; aile, 533 ; queue, 280 ; tarse, 102; bec, 40.

Cet oiseau se rencontre toute l'année dans la région (Vasse). Cet animal est identique au type de Vieillot conservé aux Galeries de Zoologie. Ce dernier est aussi un jeune, mais un peu plus âgé que celui que j'étudie. Ainsi, les plumes du dos ont une bordure fauve plus claire que sur le type de l'espèce. La base des plumes est blanche sur tout le corps; mais celles de la tête ont une portion brune assez courte en sorte qu'on aperçoit le blanc par places. Sur la poitrine antérieure on voit une tache blanche, ainsi que sur les flancs où se trouvent aussi des touffes de duvet blanc. Autour des yeux existe un duvet blanc et un trait supra-sourcilier noir.

Comme sur le type, la base des rémiges est blanche et les sous-alaires sont tachetées de brun, ainsi que le bord alaire ; les grandes couvertures supérieures et inférieures de la queue sont terminées par du blanc.

Les rectrices sont un peu différentes de celles du type. Les deux médianes ont deux bandes blanches avec la pointe blanche, tandis que sur le type il y en a trois plus une moins nettes et une pointe blanche. Les deuxièmes en ont quatre, comme sur le type, et les deux externes n'en ont sur la vexille interne que trois blanches, qui se continuent par une jaunâtre peu marquée sur l'externe.

D'après Reichenow (p. 572), cette forme ne peut être regardée comme le jeune âge de *C. pectoralis* A. Sm., puisque l'on ne connaît que des spécimens de coloration concordante et de plus aucune forme de passage entre ces deux espèces.

Habite l'ouest, le nord-est et l'est de l'Afrique. N'a été signalé qu'au Fort Chiquaqua, par Sowerby.

7. Helotarsus ecaudatus (Daud.).

Falco ec. Daudin, *Traité*, II, pl. 54 (1800); Reichenow, *Vög. Afr.*, I, p. 598 (1901); Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 314 (1903).
Le *Bateleur* Levaillant, *Ois. d'Afr.*, I, p. 31, Pl. 7 et 8 (1799).

Un spécimen de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 29 juin 1906. Nom cafre, *Chapongo*. Bec orangé à la base, noir à la pointe, cire rouge orangé; pattes jaune rouge, caroncule rouge autour de l'œil ; œil noir à bordure jaune. Longueur totale, $0^{m},615$ (n° 98).

Se rencontre toute l'année; il capture beaucoup de rats palmistes et de lièvres, surtout au moment des feux de brousse.

Il habite toute l'Afrique, au sud du Sahara et de l'Abyssinie. Il a été signalé, autour des possessions portugaises, au Transvaal, Mata-

beleland, par Buckley, au Mashonaland (Chiquaqua), par Sowerby, près de Salisbury, Mashonaland, par Marshall (1900, p. 258), sur le haut Zambèze, par Bradshaw, à Chicowa, sur le Zambèze, par Alexander (1900, p. 436).

8. Falco minor Bp.

F. minor Bonaparte, *Rev. Mag. Zool.*, p. 484 (1850); Reichenow, *Vögel Afr.*, I. p. 622 (1901); Sclater, *B. South Afr.*, III, p. 268 (1903).
Faucon huppé Levaillant, *Ois. d'Afr.*, I. p. 121, Pl. 28 (1799).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 2 septembre 1904. Bec gris bleu, caroncule jaune, œil gris et noir, pattes jaunes. Longueur totale, $0^m,385$; aile, $0^m,275$; queue, $0^m,131$; bec, $0^m,02$ (n° 31).

Ce petit Faucon pèlerin vit dans les montagnes; il prend beaucoup de perdrix de rocher. Son cri ressemble en plus fort à celui du Tiercelet.

Habitat: sud et sud-est de l'Afrique, Madagascar.

Signalé au Natal, près de Durban, par Gurney, dans la Rhodésie, près de Pandamatenka, par Holub, et dans la Cafrerie, par Krebs.

II. — Psittacidés.

9. Poecephalus robustus (Gm.).

Psittacus rob. Gmelin, *Syst Nat*, p. 344 (1788).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 30 décembre 1905 (n° 89). Bec jaune pâle, pattes grises, œil noir avec bordure marron. Taille, $0^m,312$. Nom cafre, *Ghora*.

Cette femelle porte sur le front une large bande d'un beau rose assez vif. Elle ne diffère pas du mâle.

M. Vasse n'a observé ce Perroquet que dans la vallée du Pungoué, où il ne vit jamais en sociétés de plus de trois individus. Il nidifie dans le creux des arbres vermoulus comme l'avait déjà affirmé Levaillant, et cause de grands dommages aux récoltes de blé cafre (*Sorghum vulgare*). Il semble être de passage dans cette région, arriver en novembre et partir en juillet.

Signalé comme habitant les parties sud orientales de l'Afrique, du Knysna jusqu'au Natal, et dans la Rhodésie, au Mashonaland. Son aire d'habitat s'étend donc beaucoup plus au nord jusqu'au Zambèze.

10. Poecephalus fuscicapillus (Verr. et des Murs).

Pionus fusc. Verreaux et des Murs, *Rev. Mag. Zool.*, p. 58 (1869, Zanzibar).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude, 11 juillet 1905 (n° 67). Bec noir, pattes noires, œil brun avec bordure jaune; longueur totale, 0m,23.

Cet oiseau se fait voir toute l'année en petites bandes de quatre à six individus. Il nidifie dans les troncs d'arbre et cause de grands dommages aux champs de sorgho. Son vol est rapide et son cri vif et perçant.

Habite l'Afrique orientale, depuis Mombas jusqu'au Souasiland. A été signalé à Inhambane par Peters et sur le fleuve Sabi. Pas encore signalé dans le bassin du Pungoué.

III. — Coraciidés.

11. Coracias caudatus L.

Cor. caud. Linné, *Syst. Nat.*, I., p. 160 (1766); Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 223 (1902-1903); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 48 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 29 août 1905.

Bec noir, pattes grises, œil noir, bordure jaune pâle. Longueur totale, 0m,383 (n° 72).

Grand amateur d'insectes. Vient aux feux de brousse et fait concurrence aux guêpiers dans la chasse des sauterelles. Beaucoup plus commun en régions basses qu'en montagnes.

Il habite le sud et l'est de l'Afrique; à l'ouest il remonte jusqu'à l'Angola et à l'est jusqu'au Choa. Déjà signalé dans la vallée du bas Zambèze à Tete, par Kirk, dans la vallée de l'Umfuli, par Ayres et Marshall, dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

12. Eurystomus afer (Lath.).

Coracias afra Latham, *Ind. Ornith.*, t. I, p. 172 (1790).
Eur. afer Reichenow, *Vögel Afr.*, t. II, p. 229 (1902-1903); Stark, *Birds S. Afr.*, t. III, p. 54 (1903).
Le *petit Rolle violet* Levaillant, *Ois. Parad.* Rolliers, Pl. 35 (1806).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 6 novembre 1905; nom cafre, *Balame Ka Mourongo*.

Bec jaune, pattes grises, œil noir à bordure marron (n° 81).

C'est un oiseau de passage qui arrive vers le commencement de

novembre, c'est-à-dire à l'époque des orages, ce qui lui vaut le nom que les Cafres lui donnent et qui signifie « Oiseau du Tonnerre ». Il disparaît en mars. Les soirs d'orage, lorsque des migrations de termites se produisent, il les poursuit avec activité. Son cri est guttural.

Habite toute l'Afrique tropicale. Déjà signalé dans la vallée du Zambèze, par Kirk (à Tete), Meller et Alexander, près du fleuve Umfuli, par Shelley, par Ayres et par Marshall, au Fort Chiquaqua (Mashonaland), par Sowerby, à Inhambane, par Sclater. Donc localité nouvelle.

IV. — Alcédinidés

13. Ceryle rudis (L.).

Alcedo rudis Linné, *Syst. Nat.*, p. 116 (1758).
Ceryle rudis Reichenow, *Vög. Afr.*, II, p. 295 (1902-1903); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 73 (1903).

Une *femelle* du village de *Cialima*, sur le Mozambèze, affluent de droite du Pungoué ; altitude 45 mètres; 5 décembre 1905.

Bec noir, pattes noires, œil bleu à bordure noire ; longueur totale, $0^m,258$ (n° 79).

Cri vif et strident. Plane au-dessus des cours d'eau et se laisse tomber pour saisir à fleur d'eau le petit poisson.

Se rencontre partout.

Habite les îles grecques de la Méditerranée, l'Asie jusqu'au golfe Persique, l'Egypte et toute l'Afrique au sud du Sahara. Signalé dans le Mashonaland, par Shelley et Marshall, dans la vallée du Zambèze, à Tete, par Alexander.

14. Corythornis cyanostigma (Rüpp.).

Alcedo cyan. Rüppell, *Neue Wirb.*, *Vögel*, p. 70, Pl. 24, *fig.* 2 (1835).
Corythornis cyan. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 289 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 81 (1903).

Une *femelle* du confluent de l'*Uréma* et du Pungoué ; 14 février 1907.

Bec et pattes couleur corail ; œil noir avec bordure marron très clair ; longueur totale, $0^m,109$ (n° 109).

M. Vasse n'a rencontré cette espèce qu'aux basses altitudes : cours inférieur du Pungoué, du Busi, du Zambèze et de leurs affluents.

Habite toute l'Afrique au sud du Sahara, depuis la Sénégambie et l'Abyssinie, d'où provenait le type de Rüppell, jusqu'au Cap. Signalé

dans la vallée du Zambèze, par Kirk et Alexander, et dans le Mashonaland, par Shelley et Marshall.

15. Halcyon albiventris orientalis (Peters).

Alcedo albiventris Scopoli, *Del. Flor. et Faun. Insubr.*, II, p.90 (1786).
Halcyon orientalis Peters, *J. f. Ornith.*, p. 138 (1868) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 89 (1903).
Halc. alb. or. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 275 (1902-1903).

Un *mâle* de la vallée du *Revoué*. Longueur totale, 0m,196. Bec tout entier rouge. De taille plus grande que *H. chelicuti* (Stanl.).

Habite l'est de l'Afrique, du Kilimandjaro jusqu'au Mozambique et le sud-ouest, du Mossamedes jusqu'à l'Oubanghi.

Le type de l'espèce a été récolté à Inhambane par Peters. Signalé à Mapicuti, au nord de Beira, par Cavendish, et dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

16. Halcyon chelicuti (Stanley).

Alcedo ch. Stanley, *Salt's Exp. Abyss.*, App., p. 56 (1814), III, p. 89 (1903).
Halcyon ch. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p.271 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, p. 89 (1903).

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué ; altitude 750 mètres ; 17 décembre 1904.

Œil noir, mandibule supérieure noire, mandibule inférieure rouge ; pattes noires ; longueur totale, 0m,180 (n° 46).

Les ailes ont moins de 80 millimètres.

Commun dans tout le territoire.

Il habite l'Afrique jusqu'aux fleuves Orange et Waal. Il est plus rare dans la région forestière occidentale que dans les déserts du sud-est. Signalé dans le district de Salisbury, par Marshall, à Chiquaqua, par Sowerby, et dans la vallée du Zambèze, par Kirk.

V. — Bucérotidés.

17. Lophoceros melanoleucus (A. Lcht.).

Buceros melanoleucos Lichtenstein, *Cat. Rer. Nat.*, p. 8 (1793).
Loph. melanoleucos Reichenow, *Vög. Afr.*, t. II, p. 249 (1902-1903).
Loph. melanoleucus Stark, *Birds South Afr.*, t. III, p. 110.
Le *Calao couronné* Levaillant, *Ois. d'Afr.*, p. 117, Pl. 234, 235 (1806).

Un *mâle* de la vallée de *Muza*, 1.120 mètres d'altitude ; 9 septembre 1904 ; nom cafre, *Pou-pou-pou*, qui lui vient de son cri (n° 35).

Bec rouge, pattes noires, œil noir avec large bordure jaune clair. Longueur totale, $0^m,480$; bec, $0^m,09$; aile, $0^m,249$; queue, $0^m,250$.

Les deux rectrices médianes n'ont pas de blanc à leur extrémité.

Commun et sédentaire, il vit généralement en petites bandes. Il est omnivore, car M. Vasse l'a vu manger indifféremment du sorgho, des fruits, des baies, des insectes, et même, au moment des incendies, s'emparer des musaraignes.

Se remarque par son vol saccadé durant lequel il prend la forme d'une croix. Sa langue est plate, petite, sèche et cornée. La peau est facile à détacher du corps, car elle n'y tient que par quelques filaments extensibles et élastiques (Vasse).

Habite le sud de l'Afrique, à l'ouest jusqu'au Loango, à l'est jusqu'à l'Ouganda. Déjà signalé près du Zambèze, par Alexander (1899, p. 100), dans la vallée du Chiré, par Kirk (1864, p. 327), à Quilimane, par Stuhlmann, au Fort Lister, par Whyte.

18. Bycanistes buccinator (Tem.).

Buceros buccinator Temminck, *Pl. col.*, 48e liv., Pl. 284 (1824).
Byc. buccinator Reichenow, *Vögel Afr.*, t. II, p. 243 (1902-1903).
Byc. buccinator Stark, *Birds S. Afr.*, t. III, p. 106 (1903).

Une *femelle* de la vallée du *Pungoué ;* 30 novembre 1905.

Bec noir, pattes noires, œil noir avec caroncules rouges autour de l'œil ; lores noires. Longueur totale, $0^m,515$ (n° 73).

Une *femelle* de Guengère, vallée du Pungoué, 15 novembre 1906. Bec noir et jaune, pattes grises, œil noir; lores brunes (n° 108). Nom cafre, *Kakamira.*

Cet oiseau est sédentaire et vit en bande dans les bois épais qu'il affectionne. Il se nourrit de fruits et de graines.

Son cri ressemble aux plaintes d'un enfant qui pleure. Le mâle et la femelle bâtissent leur nid ensemble ; la femelle y pond et, dès qu'elle se met à couver, le mâle mure l'entrée du nid, ne laissant qu'un orifice suffisant pour qu'il puisse apporter à manger à la couveuse (Vasse).

Habite le sud de l'Afrique, jusqu'à l'Angola à l'ouest, et à Witu à l'est. Déjà signalé à Chupanga, par Kirk et Alexander, au nord du moyen Zambèze, par Foa, près du Zambèze, par Meller, et du Mwanza, par Sharpe.

VI. — Upupidés.

19. Upupa africana Bechst.

Up. afr. Bechstein, *Kurze Uebers.*, IV, p. 172 (1811); Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 337; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 10 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 403 mètres; 14 novembre 1906 (n° 107).

Bec gris, pattes grises, œil noir avec bordure marron foncé; nom cafre, *Pou-Pou*.

Cette huppe affectionne les endroits découverts et sablonneux; elle est grande mangeuse de fourmis.

De passage dans la région, car elle arrive fin mai et repart en octobre.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'au Congo d'une part et l'Afrique orientale anglaise d'autre part.

Signalé dans le Mashonaland, par Jameson, à Salisbury, par Marshall, au Fort Chiquaqua, par Sowerby, dans la vallée du Zambèze, par Kirk et Alexander.

VII. — Irrisoridés.

20. Rhinopomastus cyanomelas (V.).

Falcinellus cyan. Vieillot, *Nouv. Dict.*, XXVIII, p. 165 (1819).
Rhin. cyan. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 346; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 17 (1903).
Le *Promerops namaquois* Levaillant, *H. Nat. Prom.*, Pl. 5 et 6 (1807).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude; 28 septembre 1904.

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, $0^m,252$ (n° 43).

M. Vasse n'en a aperçu qu'un couple. Cet oiseau court avec agilité le long des branches, pour chercher des insectes.

La forme typique habite le sud de l'Afrique jusqu'au Congo et au Zambèze.

Signalé au Fort Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury, par Marshall, et dans la vallée du Zambèze, par Alexander. Il est toujours rare.

VIII. — Méropidés.

21. Dicrocercus hirundineus (A. Lcht.).

Merops hir. Lichtenstein, *Cat. rer. nat. rariss.*, p. 21 (1793).
Dicroc. hir. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 315 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 65 (1903).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 9 juillet 1904 (n° 11).

Mêmes habitudes que *Merops apiaster* L.

Habite le sud de l'Afrique. Au nord du Zambèze, on l'a trouvé dans l'Angola, le Nyassaland et l'est africain allemand. A l'ouest et dans le nord-est, il est remplacé par des formes très voisines.

Signalé par Marshall, à Salisbury, au nord du moyen Zambèze, par Foa et au Fort, Chiquaqua, par Sowerby.

22. Melittophagus meridionalis Sharpe.

Mel. mer. Sharpe, *Cat. Birds B. Mus.*, XVII, p. 45, Pl. I, *fig.* 4 (1892) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 307 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 67 (1903).

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 8 août 1904.

Bec noir, pattes noires ; œil noir avec bordure rouge. Longueur totale, $0^m,144$ (n° 14).

C'est un insectivore dont le vol ressemble à celui des autres Guêpiers. Il vit en troupes composées de cinq à six individus, au voisinage des bordures des bois ou dans les plaines.

Habite l'Afrique orientale depuis l'Ouganda jusqu'au Natal, le sud-ouest de l'Afrique depuis Loango jusqu'au Cunene et au lac Ngami.

Récolté près Beira, à Barratas et Mapicuti, par Cavendish, à Tete, par Kirk, près du Zambèze moyen, par Alexander, dans le Mashonaland, par Marshall, et au Fort Chiquaqua, par Sowerby.

23. Melittophagus bullockoides (A. Smith).

Merops bull. A. Smith. *S. Afr. Quat. Journ.*, II, p. 320 (1834).
Mell. bull. Reichenow, *Vögel Afr.*, II. p. 311 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 70 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué ; 40 mètres d'altitude ; 16 juillet 1906 (n° 68).

Bec noir, pattes noires. Longueur totale, 0^m, 210.

Ce guêpier vit en colonies dans les plaines basses du Pungoué. Il nidifie dans les falaises argileuses qui bordent le fleuve, le nid est

au fond d'un trou. Son cri est à peu près *Tri-tri-tri*. Il paraît sédentaire dans la région.

Habite le sud-ouest de l'Afrique, du Congo jusqu'au Cunene, et l'est, du lac Naiwascha jusqu'au fleuve Orange. Signalé dans le district de Beira, à Barratas, par Cavendish, vallée du Zambèze, par Kirk; à Umquasi, près Tete, sur le Zambèze, par Alexander.

24. Merops nubicoides Des Murs Puch.

Merops nub. Des Murs Pucheran, *Rev. Zool.*, p. 243 (1846) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, II., p. 328 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 62 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 4 septembre 1905.

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, $0^m,360$ (n° 77).

Ce guêpier arrive dans les plaines basses, d'altitude variant entre 100 et 20 mètres, dès le début de juillet et fait son apparition par vent du nord. Il reste dans le pays de cette époque jusqu'aux premières pluies d'octobre. Il ne manque pas un feu de brousse. Il fait alors une grande destruction des insectes qui s'envolent devant l'incendie. Quitte ces régions en octobre et passe par vent du nord dans la région montagneuse du Manica, de 1.100 à 1.700 mètres. Il n'y séjourne généralement pas et poursuit sa migration au sud.

Habite le sud de l'Afrique, du Congo au Damara et du Nyassaland au Natal. Signalé sur le Zambèze et le Chiré, par Kirk, à Sena, Zumbo, sur le Zambèze, par Alexander, à Mapicuti, par Cavendish, et Inhambane, par Francis.

25. Merops apiaster L.

Mer. ap. Linné, *Syst. Nat.*, p. 117 (1758); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 321 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 57 (1903). Le *Guêpier* de d'Aubenton.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres, 15 décembre 1904 (n° 45).

Le guêpier vit en petites bandes; il se livre constamment à la chasse des insectes; son vol est tantôt rapide, tantôt planant; son cri est aigu et désagréable.

Il habite le sud de l'Europe, le nord de l'Afrique, l'Asie Mineure, l'Inde et l'Afrique en hiver. Signalé à Salisbury, par Marshall, près de Zumbo, vallée du Zambèze, par Alexander.

IX. — Caprimulgidés

26. Caprimulgus trimaculatus.

Scotornis trim. Swainson, *B. West. Afr.*, p. 70 (1837).
Cap. trim. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 359 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 38 (1903).

Un *mâle* (?) de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 23 août 1904 (n° 22).

Bec noir, pattes grises, œil bleu très foncé. Longueur totale, $0^m,252$; aile, $0^m,170$; queue, $0^m,140$. Seules les trois rémiges primaires sont marquées d'une tache blanche sur leur vexille interne. Ce spécimen me paraît être une femelle, car les taches blanches manquent sur les rectrices externes.

Habite le sud, l'est et le nord-est de l'Afrique ; il paraît rare partout. N'a pas encore été collecté dans cette région.

X. — Cypsélidés.

27. Cypselus caffer Lcht.

Cyps. caffer Lichtenstein, *Verz. Doubl.*, p. 58 (1823) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.* III, p. 25 (1903).
Apus caffer Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 380 (1903).

Un *mâle* de *Güengère*, 29 juillet 1906 (n° 97).

Bec noir, pattes noires ; œil noir à bordure marron très foncé. Nom cafre, *N'yen tambamibvi.*

Longueur totale, $0^m,156$; aile, $0^m,149$; queue, $0^m,065$; rectrices moyennes, $0^m,050$. Les rectrices latérales sont donc très courtes et rappellent celles de *C. horus* (Hartl.).

Il est de passage dans la région, car il apparaît en décembre et disparaît en avril.

Habite le sud de l'Afrique. Il est rare dans le Mashonaland, où il a été signalé par Ayres et Jameson.

XI. — Coliidés.

28. Colius striatus minor Cab.

Colius minor Cabanis, *J. f. O.*, p. 94 (1876).
Col. st. minor Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 203 (1903).
Le *Coliou rayé* de Levaillant.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 21 août 1904 (n° 26).

Bec : partie supérieure noire, partie inférieure blanche; pattes rouges, œil noir.

Se nourrit d'insectes ; vit en bandes de six à dix individus.

Cette forme habite le sud-est de l'Afrique.

Signalée à Tete, par Alexander, et dans la vallée du Zambèze, par Meller.

XII. — Trogonidés.

29. Hapaloderma narina (Steph.).

Trogon narina Stephens, *Gen. Zool.*, IX, p. 14 (1815).
Apal. nar. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 212.
Hapal. nar. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 121 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, à 40 mètres d'altitude; 3 décembre 1905 (n° 85).

Mandibule supérieure verdâtre, mandibule inférieure jaune, œil noir à bordure rouge brique; longueur totale, $0^m,325$.

C'est un oiseau rare dont M. Vasse en trois ans n'a vu que trois spécimens : l'un d'eux fut observé dans la vallée du Muza à 1.120 mètres d'altitude. Il semble affectionner les ravins ombreux et les bois fourrés.

Habite le sud de l'Afrique; à l'est on le trouve jusqu'au sud de l'Abyssinie, tandis qu'à l'ouest il remonte jusqu'à l'Angola (ou Loango). Signalé dans la vallée du Zambèze et du Chiré (Tchibisa) par Kirk.

XIII. — Musophagidés.

30. Turacus livingstonei G. R. Gray.

Tur. liv. Gray, *P. Z. S.*, p. 44 (1864) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 51; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 216 (1903).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude; 11 avril 1904 (n° 13).

Bec rouge, pattes noires, œil bleu de Prusse avec bordure marron clair; un liséré blanc autour des yeux. Longueur totale, $0^m,420$. Nom cafre, *Koulou-Koulou*, qui lui vient de son cri.

Oiseau sédentaire, ne se rencontre qu'aux grandes altitudes, jamais plus bas que 900 mètres. Il se nourrit de fruits et de baies et vit en petites bandes de six à huit individus qui affectionnent les ravins ombreux, les bois touffus. Il court avec agilité le long des branches.

Dès qu'elle entend quelque bruit, la bande reste immobile dans le feuillage où elle se dissimule adroitement. Sitôt qu'elle croit le danger passé, chacun de ses membres s'envole silencieusement l'un après l'autre.

Habite le sud-est de l'Afrique, depuis le Zoulouland jusqu'au lac Niassa. Signalé près du Zambèze par Kirk.

31. Gallirex porphyreolophus (Vig.).

Corythaix porph. Vigors, *P. Z. S.*, p. 93 (1831).
Gallirex porph. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 39; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.* III, p. 217 (1903).

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, à 750 mètres d'altitude; 2 novembre 1904 (n° 47).

Bec noir bleuté; pattes noires, œil bleu de Prusse avec bordure marron clair; caroncule rouge vif autour de l'œil; longueur totale, $0^{m},420$. Nom cafre, *Koulou-Koulou*.

Ces animaux vivent par petites bandes ne dépassant pas quatre individus, qui ordinairement ne quittent l'arbre sur lequel ils se trouvent que l'un après l'autre.

Ils vivent de fruits et de graines qu'ils vont chercher dans les ravins fourrés, dans les bois épais. Très adroit de ses pattes, le Gallirex parcourt les branches avec agilité. Entend-il quelque bruit, il se tient immobile dans la pénombre qui règne toujours là où il se complaît et, aussitôt que le silence est rétabli, il s'envole. Quand il est surpris, il prend son vol en poussant un cri bruyant qui lui vaut son nom cafre de *Koulou-Koulou*. Pendant la saison des amours, le mâle répète sans cesse le cri de *Kou-Kou*, etc.

Cette espèce habite le sud-est de l'Afrique, donc le sud du Zambèze. Au nord de ce fleuve, elle est remplacée par *G. chlorochlamys* Shell.

Elle a été signalée à Inhambane, par Peters, au Fort Chiquaqua, par Sowerby, dans la vallée du Zambèze, par Kirk et Meller, et sur les bords du Masoë et de l'Umvinji, par Marshall.

XIV. — Cuculidés.

32. Coccystes jacobinus (Bodd.).

Cuculus jacobinus Boddaert, *Tabl. Pl. Enl.*, 53 (1783).
Coccystes jac. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 78; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 195 (1903).
Le Coucou edolio femelle, de Levaillant.

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Punguoé, 40 mètres d'altitude; 7 novembre 1905 (n° 84).

Bec noir, pattes noires, œil noir avec bordure foncée. Longueur totale, $0^m,350$. Il est assez rare dans la région.

C'est un insectivore, comme Fischer l'a déjà montré.

Habite le sud de l'Asie, et l'Afrique au sud du Sahara. Signalé à Tete, sur le Zambèze, par Livingstone, et à Zumbo, sur le moyen Zambèze, par Alexander, ainsi que dans les environs de Salisbury (Mashonaland), par Marshall.

33. *Coccystes serratus* (Sparrm.).

Cuculus serratus Sparrmann, *Mus. Carls.*, I, Pl. 111 (1789).
Cocc. serr. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 75 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 199 (1903).
Le *Coucou edolio* mâle de Levaillant.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, à 750 mètres d'altitude ; 6 novembre 1905 (n° 50).

Bec noir, pattes noires ; œil noir avec bordure marron foncé ; longueur totale, $0^m,370$; aile, $0^m,160$; queue, $0^m,200$; bec, $0^m,022$. Les dimensions de ce spécimen sont donc un peu plus grandes que celles indiquées dans les ouvrages.

Insectivore ; il chasse particulièrement les fourmis ailées. Son cri, composé de trois syllabes, peut se représenter par *To-ho-he*.

Habite l'est et le sud de l'Afrique. Signalé au Natal et au Transvaal, mais pas dans la région du Pungoué.

34. Centropus senegalensis (L.).

Cuculus seneg. Linné, *Syst. Nat.*, I, p. 169 (1766).
Centropus seneg. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 58 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 206 (1903).
Le *Coucal houhou* Levaillant.

Un jeune, presque adulte, de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 30 août 1904 (n° 28). Les couvertures alaires sont encore faiblement striées, tandis que le croupion, les sus-caudales et les secondaires le sont visiblement, ainsi que les sous-caudales.

Commun et sédentaire, vivant dans les fourrés et les hautes herbes d'où il s'envole lourdement avec bruit. M. Vasse a trouvé des insectes dans son gésier et particulièrement des punaises.

Ce Coucal paraît habiter toute l'Afrique tropicale. Finsch, Hartlaub et Kirk l'ont récolté à Zanzibar, et Buckley dans le Bechuanaland (Bamangwato). Ce sont les localités les plus méridionales où on l'a rencontré.

XV. — Capitonidés.

Lybius torquatus (Dum.).

Bucco torq. Dumont, *Dict. Sc. nat.*, IV, p. 56 (1806).
Lybius torq. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 125; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 157 (1903).
Le *Barbu à plastron noir* de Levaillant.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, à 750 mètres d'altitude; 29 décembre 1904 (n° 52). Bec noir, pattes noires, œil noir avec bordure rouge. Longueur totale, $0^m,177$. La teinte rouge du front est mêlée de noir.

Frugivore et granivore. Il vit en bandes. Son cri est perçant et répété plusieurs fois très rapidement.

Il habite le sud de l'Afrique jusqu'au Zambèze et au Benguella. Signalé à Tete, sur le Zambèze et Chupanga, par Kirk, à Salisbury, par Marshall, à Zumbo, par Alexander.

36. Trachyphonus cafer (V.).

Picus cafer Vieillot, *Nouv. Dict.*, XXIV, p. 102 (1818).
Trachyp. cafer Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 254; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 170 (1903).
Le *Promépic* de Levaillant.

Un *mâle* de *Guengère*, dans la vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 17 juillet 1904 (n° 69).

Pattes noires, œil noir avec bordure rouge. Longueur totale, $0^m,239$.

Oiseau très rare. M. Vasse, pendant son voyage de trois ans ne l'a aperçu que deux fois à Guengère.

Habite le sud de l'Afrique; son aire d'habitat remonte à l'est jusqu'au Pangani, à l'ouest jusqu'à l'Angola. Signalé dans le Mashonaland, par Marshall, à Tete, sur le Zambèze, par Kirk, et dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

XVI. — Picidés.

37. Campothera malherbei (Cass.).

Chrysopicus malh. Cassin, *J. Ac. Philad.*, p. 459 (1863).
Dendromus malh. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 172 (1902-1903).

Une *femelle*(?) de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude; 27 septembre 1906 (n° 39).

Bec gris, pattes noires, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, $0^{m},170$.

Ce spécimen, étiqueté femelle, porte sur le vertex un grand nombre de plumes marquées d'une fine bande noire limitant la couleur rouge terminale.

D'après M. Vasse, son cri est strident.

Cette espèce habite l'Afrique orientale ; elle n'avait pas encore été signalée au sud du Zambèze.

38. Campothera bennetti (A. Sm.).

Chrysoptilus benn. A. Smith, *Rep. Exp. centr. Afr.*, p. 53 (1836).
Dendromus benn. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 177.
Campothera benn. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, III, p. 133 (1903).

Un *mâle juv.* de la vallée du *Muza*, à 1.120 mètres d'altitude ; 19 août 1904 (n° 25).

Bec gris, pattes noires, œil noir à bordure rouge ; cri strident.

Ce spécimen, étiqueté mâle, a tous les caractères de la femelle, car le front et le vertex sont tachetés de blanc sur fond gris noir ; la gorge est d'un brun châtain ainsi que les lores, un trait au-dessous de l'œil et les joues. L'abdomen jusqu'aux anales est marqué de taches noires arrondies.

Il habite le sud et l'est de l'Afrique. Signalé dans le district de Salisbury, Mashonaland, par Marshall.

XVII. — Hirundinidés.

39. Hirundopuella. Tem. Schl.

Hir. puella Temminck, Schlegel, *Fauna Japon.*, p. 34 (1842) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, 301 (1901) ; Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 413 (1903).

Un spécimen de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 1er septembre 1904 (n° 30).

Nidifie dans les maisons comme l'hirondelle d'Europe. Elle arrive en février et repart en octobre. C'est la seule hirondelle qui vienne assiter aux feux de brousse pour s'y nourrir d'insectes.

Habite toute l'Afrique tropicale. Signalé à Zumbo, par Alexander, à Salisbury, par Marshall.

XVIII. — Muscicapidés.

40. Bradornis pallidus murinus Finsch.

Muscicapa pallida v. Müller, Naumann, p. 28 (1851)
Bradyornis mur. Finsch et Hartlaub, *Vög. Ost-Afr.* p. 866 (1870).
Bradornis pall. mur. Reichenow, *Vögel Afr.*, II. p. 436.
Bradyornis mur. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 239 (1901).

Une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, 750 mètres d'altitude; 14 janvier 1905 (n° 62).

Bec noir, pattes noires, œil noir avec bordure marron clair. Longueur totale, 0m,170.

Cet oiseau est insectivore et affectionne les fourrés.

Habite le sud de l'Afrique. Signalé à Salisbury, Mashonaland, par Marshall, et au nord du Zambèze, par Foa.

41. Tchitrea plumbeiceps (Rchw.).

Terpsiphone pl. Reichenow, *Werth. Mittl. Hochl. D. Ost Africa*, p. 275 (1898).
Tchitra pl. Reichenow, *Vögel Afr.*, II p. 510 (1903).

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Pungoué, altitude 750 mètres; 6 janvier 1905 (n° 55).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,214.

C'est un insectivore, qui vit dans les fourrés épais, comme *T. perspicillata*.

Habite le sud de l'Afrique. Les limites de son air d'habitat n'ont pas encore été précisées. Foa l'a collecté au nord du moyen Zambèze.

42. Tchitrea perspicillata (Sw.).

Muscipeta persp. Swainson, *B. W. Afr.*, II, p. 60 (1837).
Tchitrea persps. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 261 (1901); Reichenow, *Vögel Afr.* II, p. 508 (1903).
Le *Gobe-Mouche tchitrec* de Levaillant.

Un *mâle* du village de *Ganda*, au bord du Pungoué, à 33 mètres d'altitude; 26 septembre 1905 (n° 78).

Bec bleu, pattes gris bleu, œil noir à bordure marron; caroncule bleue près de l'œil. Longueur totale, 0m,372. Nom cafre, *Bombolo*.

Habite le sud-est de l'Afrique, probablement jusqu'au Zambèze ; au nord il serait représenté par la forme *E. persp. suahelica* (Rchw.).

Signalé à Salisbury par Marshall. C'est vraisemblablement à cette forme typique qu'il faut rapporter les spécimens collectés dans la vallée du Zambèze par Alexander et Meller, et à Tete, par Kirk.

43. Batis molitor (Hahn Küster).

Muscicapa molitor Hahn et Küster, *Vög. aus Asien*, etc., 20, Pl. 3 (1822).
Pachyprora molitor Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 255 (1901).
Batis mol. Reichenow, *Vög. Afr.*, II, p, 482 (1903).

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 28 septembre 1904 (n° 40).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure jaune très clair.

C'est un insectivore qui affectionne les fourrés. Son cri ressemble assez exactement à celui du Rossignol des murailles d'Europe.

Habite le sud de l'Afrique, jusqu'au sud de l'Angola et au Zambèze. Signalé à Salisbury par Marshall, dans la vallée du Zambèze, par Alexander et Meller, à Tete et Chupanga, par Kirk, et dans le district de Beira (Stark).

XIX. — Pycnonotidés.

44. Pycnonotus layardi Gurn.

Pyc. lay. Gurney, *Ibis*, p. 390 (1879); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 423 (1905); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 63 (1901).

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 25 juin 1904 (n° 4)

Œil noir, pattes noires, bec noir. Longueur totale, $0^m,195$; aile, $0^m,091$; queue, $0^m,088$.

Oiseau très commun, vivant de fruits, de graines et d'insectes. Siffle et crie.

Habite l'est de l'Afrique depuis le sud de l'Abyssinie (lac Abaja) jusqu'à la colonie du Cap. Signalé à Chupanga, à Tete, par Kirk, vallée du Zambèze, par Alexander, à Beira, Cavendish, à Salisbury, par Marshall, et à Chiquaqua, par Sowerby.

XX. — Timélides.

45. Crateropus jardinei kirki Sharpe.

Crat. jardinii. A. Smith. *Rep. Exp. Centr. Afr.*, p.45 (1836).
Crat. kirkii Sharpe, *Layards, Birds S. Afr.*, p. 215, 815 (1875).
Crat. jard. kirki Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 659 (1905).
Crat. kirki. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 57 (1901).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 20 juin 1906 (n° 96).

Bec noir, pattes grises, œil noir avec bordure jaune. Longueur totale, 0m,225; aile 0m,097, queue, 0m,099.

Cet oiseau est commun; il est sédentaire et vit en bandes. Quand il est surpris, il pousse des cris répétés qui constituent une sorte de ramage criard. Il est insectivore. Nom cafre, *Guengélé*.

Cette forme habite les territoires avoisinant le Zambèze et le lac Nyassa jusqu'à l'Est africain allemand.

Signalé à Tete, Sumba, sur le Zambèze, par Alexander, près du Zambèze, par Kirk, à Mapicuti, près Beira, par Cavendish.

XXI. — Turdidés.

46 Merula cabanisi ([Bp.] Cab.).

Turdus cab. (Bp.) Cabanis, *Mus. Hein.* I, p. 3 (1850); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 687; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 177 (1901).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 2 juillet 1904 (n° 6).

Bec jaune avec le culmen noirâtre, pattes jaunes, œil noir à bordure marron. Longueur totale, 0m,205.

Ces oiseaux affectionnent les fourrés.

Habite les régions centrale et orientale du sud de l'Afrique. Cette espèce remplace *T. olivascens* au nord du fleuve Orange. N'avait pas encore été signalée dans le bassin inférieur du Zambèze.

47. Merula libonyana libonyana (A. Sm.).

Merula libonyana A. Smith, *Rep. Exp. Centr. Afr.*, p. 45 (1836).
Turdus lib. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 693; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 177 (1901).

Une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué; altitude 750 mètres; 7 juillet 1905 (n° 64).

Bec jaune corné, pattes jaunes, œil noir à bordure grise. Longueur totale, $0^m,210$.

Cet oiseau a les allures de la Grive.

L'espèce typique habite le sud-est de l'Afrique. Signalé à Salisbury, par Marshall. Au nord du Zambèze et près de la côte, vit la forme *T. lib. tropicalis* Ptrs, dont les parties supérieures sont plus brunâtres et la poitrine lavée d'orange (Voir Hellmayr, *J. f. O.*, p. 219, 1902).

48. Cossypha heuglini Hartl.

Coss. heugl. Hartlaub, *J. f. O.*, p. 36 (1866); Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 758; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 211 (1901).

Un *mâle*, *Tendo du Pungoué*, affluent de l'Uréma, altitude 20 mètres; 3 septembre 1906 (n° 106).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure marron très foncé.

Un *mâle* du village de *Cialima*, au bord du Mozambèze, affluent du Pungoué, altitude 45 mètres; 5 octobre 1905 (n° 80).

Les deux traits sourciliers, en avant de l'œil, sont bordés de noir en dessous et se rejoignent sur la ligne médiane du front.

Ce *Cossypha* est insectivore et vit dans les buissons et les fourrés, situés de préférence dans les ravins où coulent des ruisseaux.

Il possède un cri strident et pousse aussi un sifflement assez doux.

Habite de la vallée du Zambèze et du Transvaal jusqu'au Nil supérieur d'où provenait le type, et au Victoria-Nyanza. Signalé sur le Zambèze, de Chicowa à Zumbo, par Alexander, à Salisbury, Mashonaland, par Marshall.

49. Pratincola torquata (L.).

Muscicapa torq. Linné, *Syst. Nat.*, p. 328 (1766).
Pratincola torq. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 732; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 190.
Le *Traquet pâtre* de Levaillant.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 20 août 1904 (n° 20).

Œil noir, bec noir, pattes noires. Longueur totale, $0^m,130$.

Cet oiseau vit dans les fourrés et les grandes herbes.

Habite le sud de l'Afrique, d'une part jusqu'à l'Angola, d'autre part jusqu'au lac Nyassa. Signalé dans le Mashonaland, par Jameson, à Salisbury, par Marshall, à Chiquaqua, par Sowerby, dans la vallée du Zambèze, par Meller.

50. Saxicola pileata (Gm.).

Motacilla pileata Gmelin, *Syst. Nat.*, II, p. 965 (1788).
Saxicola pil. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 718 (1905).
Sax. pil. livingstonii Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 196 (1901).
Le *Traquet imitateur* de Levaillant.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 5 janvier 1905 (n° 54).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,173. La bande frontale blanche est large.

Ces oiseaux vivent dans les Graminées et les bas taillis de la plaine du Revoué.

Habite l'est, le sud et le sud-ouest jusqu'au Benguella. Signalé à Tete par Kirk, à Tete, Mesananga et Zumbo, par Alexander, à Salisbury, par Marshall.

XXII. — Sylviidés.

51. Cisticola ruficapilla (A. Sm.).

Drymoica ruf. A. Smith, *Ill. Z. South Afr. Aves*, Pl. 73, fig. 1 (1842).
Cisticola ruf. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 565 (1905).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 23 janvier 1906 (n° 90).

Bec jaune pâle, culmen foncé, pattes grises, œil noir à bordure marron. Longueur totale, 0m,099. Nom cafre, *Timba* ou *Matimbatimba*.

Il niche dans les Graminées ou les petits arbrisseaux. Son nid est fait de brins d'herbes, et il y dépose quatre à cinq œufs. Dans la saison des pluies, il évite que le nid soit mouillé, en tissant au-dessus un toit en forme de dôme composé de feuilles d'essences résineuses et maintenu au bord du nid par des filaments d'herbes passés dans les feuilles.

Habite du Natal au Mashonaland. Cette espèce ayant été très souvent réunie à *C. aberrans* (A. Sm.), il est difficile de préciser les localités où elle a été trouvée.

52. Cisticola semifasciata Rchw.

Cisticola semif. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 544 (1905).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 24 août 1904 (n° 23).

Bec marron, pattes jaunes, œil noir avec large bordure jaune clair. Longueur totale, $0^m,135$; aile, $0^m,050$; queue, $0^m,055$; bec, 0^m011 à $0^m,012$; tarse, $0^m,020$.

Ce spécimen se distingue de *C. subruficapilla* (A. Sm.) par sa gorge qui seule est blanche, tandis que le jugulum et l'abdomen sont d'un brun gris jaunâtre. Les sous-caudales sont d'un brun de rouille clair, les sous-alaires isabelles et les rectrices, sauf les deux médianes, ne portent une tache noire que sur la vexille interne.

Comme on le voit, les dimensions sont plus fortes que chez *C. muelleri* Alex. du Zambèze.

Cet oiseau vit dans les prairies à hautes herbes, et dans les buissons bas et touffus. Il est insectivore.

Habite les régions du lac Nyassa. Il n'a pas été signalé aussi au sud.

53. Apalis florisuga ([Lcht.] Rchw.).

Euprinodes florisuga (Lcht.) Reichenow, *J. f. O.*, p. 314 (1898).
Apalis flor. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 611 (1905).
Chlorodyta flavida, Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 125 (1901).

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres ; 5 juillet 1906 (n° 99).

Pattes jaunes, bec noir, œil noir à bordure jaune clair. Longueur totale, 0^m, 108. Cette femelle n'a pas de tache pectorale *noire*.

Un *mâle*, *tendo du Sungoué*, affluent de l'Uréma, altitude 20 mètres ; 26 août 1906 (n° 104).

Bec noir, pattes noires, iris jaune très pâle.

Ce petit oiseau est insectivore et vit cantonné dans les buissons et les bas taillis.

Cette détermination m'a été confirmée par le professeur Reichenow.

Habite le sud-est de l'Afrique. N'a pas encore été signalé dans cette région. M. Foa a rapporté de la région des grands lacs immédiatement au nord du Zambèze moyen un spécimen [1] qui appartient à ce genre et paraît faire le passage entre cette forme et *A. neglecta* (Alex.), car il n'y a que la moitié postérieure du vertex qui soit verdâtre.

[1] Voir Oustalet, *Bull. Mus.*, 1898, p. 60 : *Eremomela elegans* (Heugl.), nom ind. Rimba.

54. Prinia mystacea Rüpp.

Pr. myst. Rüppell, *N. Wirb. Vög.*, p. 110 (1835); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 590 (1905) ; Stark et Sclater , *Birds S. Afr.*, II, p. 135 (1901).

Un *mâle* de la plaine du *Revoué*, 750 mètres d'altitude (n° 49).

Bec gris, pattes grises, iris gris clair. Longueur totale, 0m,122.

C'est un insectivore qui affectionne les bas taillis. Son cri ressemble à celui du Roitelet triple bandeau d'Europe.

Habite toute l'Afrique au sud du Sahara, pourtant il n'a pas encore été collecté dans la colonie du Cap. Signalé à Beira, Mapicuti, par Cavendish, à Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury, par Marshall, dans la vallée du Zambèze, par Alexander, à Tete, par Kirk et Peters.

XXIII. — Prionopidés.

55. Prionops talacoma A. Sm.

Pr. tal. A. Smith, *Rep. Exp. Cent. Afr.*, 45 (1836); Reichenow, *Vögel Afr.*, II. p. 528 ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 52 (1901).

Un *mâle* et une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètre; 16 juin 1904 (nos 1 et 2).

Bec noir, pattes rouges, œil noir à bordure jaune. Longueur totale 0m,195 et 0m,200.

Sédentaires et communs, vivent en bandes de six à dix individus.

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 10 juillet 1906 (n° 101).

Bec noir, pattes rouges, œil, noir, bordure très pâle, paupières jaunes. Nom cafre, *Timbo*.

Cet oiseau, qui paraît habiter la région toute l'année, vit en bandes de six à dix individus.

Il habite le sud de l'Afrique, mais n'a pas été recontré au sud du fleuve Orange; à l'ouest on le trouve jusqu'à l'Angola, à l'est jusqu'au lac Victoria Nyanza. Signalé à Salisbury, Mashonaland, par Marshall, dans la vallée du Zambèze, par Holub et Alexander, à Tete, par Peters et Kirk, à Mapicuti, par Cavendish, au nord du moyen Zambèze, par Foa.

56. Sigmodius retzi tricolor (G. R. Gray).

Prionops retzii Wahlberg, *Oefvers. k. Vet. Akad. Förh.*, Stockhom, p. 174 (1856).
Prionops tricolor Gray, *P. Z. S.* p. 45 (1864).
Sigmodus retzii tricolor Reichenow *Vögel Afr.*, II, p. 535 (1903).
Sigmodus tricolor Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 50 (1901).

Une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 21 janvier 1905 (n° 65).

Bec et pattes rouges, œil marron à bordure d'un jaune d'or plus vif vers la périphérie, caroncule rouge autour de l'œil. Longueur totale 0m,211.

Cet oiseau est assez rare et vole à peu près comme la huppe.

Habite l'est de l'afrique depuis le Pangani et Mombosa jusqu'au Transvaal. Signalé à Mapicuti par Cavendish, sur le bas Chiré, à Tete, Chupanga, Tschibisa, par Kirk, dans la vallée du Zambèze, par Alexander, à Salisbury, par Marshall.

XXIV — Laniidés.

59. Lanius collaris L.

Lan. coll. Linné, *Syst. Nat.* I, p. 135 (1766); Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 607; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 6 (1901).
Le *Fiscal* de Levaillant.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 23 septembre 1904 (n° 36).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure jaune.

C'est un insectivore, vivant dans les montagnes en terrains couverts d'une faible végétation ou d'arbres rabougris.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'au Mossamedes, d'une part, et au lac Nyassa, d'autre part. Signalé à Salisbury, par Marshall.

58. Malaconotus olivaceus starki (W. Scl.).

Mal. olivaceus Vieillot, *Nouv. Dict.*, XXVI, p. 135 (1818).
Laniarius starki W. L. Sclater, *Ibis*, p. 135 (1901); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 41 (1901).
Mal. olivaceus starki Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 603 (1903).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 6 août 1904 (n° 12).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure jaune. Longueur totale, 0m,215.

Cet oiseau vit isolé et semble avoir les habitudes de la Pie-grièche.

Son cri se compose d'un sifflement court, suivi immédiatement d'un bruit imitant le clappement de la langue.

Habite l'est et le sud de l'Afrique depuis le Victoria-Nyanza jusqu'au Cap. Signalé dans la vallée du Zambèze, par Kirk et Alexander, à Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury, Mashonaland, par Marshall.

59. Laniarius major mossambicus (Rchw.).

Telephonus major Hartlaub, *Rev. Zool.*, p. 108 (1846).
Dryoscopus maj. moss. Reichenow, *J. f. O.*, p. 141 (1880).
Laniarius maj. moss. Reichenow, *Vög. Afr.*, II, p. 581.
Dryoscopus moss. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 29 (1901).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude ; 14 juillet 1904 (n° 21).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,220; aile, 0m,085; queue, 0m,104.

Cet oiseau est commun et sédentaire dans les fourrés. C'est un insectivore. Il peut émettre une quantité de cris, depuis une sorte de grincement jusqu'à l'imitation du bruit que fait un marteau frappant la tôle dans le lointain.

Cette forme, plus petite que la forme typique, habite la région côtière de l'est de l'Afrique, depuis l'Afrique orientale allemande jusqu'au Mozambique. Elle a été signalée au Mozambique, par Fischer, à Tete et Chicowa, sur le Zambèze, par Alexander, à Salisbury, par Marshall.

60. Laniarius sulfureopectus similis (A. Sm.).

Malaconotus sulf. Lesson, *Traité Ornith.*, p. 373 (1831).
Mal. similis A. Smith, *Rep. Exp. Cent. Afr.*, p. 44 (1836).
Chlorophoneus sulf. sim. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 563 (1903).
Laniarius sulfureipectus Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 40 (1901).

Un *mâle* juv. de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres ; 26 septembre 1904 (n° 41).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure rouge pâle. Longueur totale, 0m,180 ; aile, 0m,084 ; queue, 0m,087.

C'est un oiseau insectivore qui vit dans les plaines et les taillis.

Ce spécimen paraît intermédiaire entre *L. sulfureopectus chrysogaster* et *L. s. similis*. Le trait sourcilier jaune dépasse à peine l'œil, le front est jaune clair, la région auriculaire grise, à reflet plus foncé que la tête, et la tache orangée du jugulum rejoint de chaque côté le gris de la nuque.

Habite le sud de l'Afrique. Signalé dans la vallée du Zambèze par Alexander, à Tete, par Kirk, et au nord du moyen Zambèze, par Foa.

61. Dryoscopus cubla (Shaw).

Lanius cubla Shaw, *Gen. Zool.*, VII, p. 328 (1809).
Dryoscopus c. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 593; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 25 (1901).
Le *Cubla* de Levaillant.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 24 septembre 1904 (n° 37).

Bec noir, pattes rouges, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, 0m,154.

Cet oiseau est insectivore et se plaît dans les fourrés épais. Son cri se compose d'une sorte de grincement suivi immédiatement d'un sifflement court et fort.

Le Cubla habite l'est de l'Afrique depuis la colonie du Cap jusqu'au Zambèze. Signalé près de Salisbury par Marshall, à Tete, par Kirk, et dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

62. Pomatorhynchus senegalus (L.).

Lanius senegalus Linné, *Syst. Nat.*, I, p. 137 (1766).
Pomatorhynchus senegalus Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 547.
Telephonus senegalus Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 19 (1901).
La *pie-grièche à tête rousse du Sénégal* de Levaillant.

Une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 31 décembre 1904 (n° 53).

Bec noir, pattes grises, œil noir à bordure grise. Longueur totale, 0m,232.

Insectivore. Assez commun dans les plaines du Revoué.

Habite toute l'Afrique au sud du Sahara, mais pas le nord-est. Signalé à Salisbury, à Chupanga, sur le bas Zambèze, par Kirk, à Beira, par Cavendish, et à Zumbo, par Alexander.

63. Pomatorhynchus tschagra (Vieill.).

Thamnophilus tschagra Vieillot, *Nouv. Dict.*, III, p. 317 (1816).
Pomatorhynchus ts. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 543.
Telephonus ts. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 21 (1901).
Le *Tschagra* de Levaillant.

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres, 7 juillet 1904 (n° 9).

Iris marron, bec noir, pattes noires. Longueur totale, 0m, 203; aile, 0m,074; queue, 0m,090.

Cet oiseau, qui affectionne la lisière des bois, vit de sauterelles et d'insectes. Son cri est une sorte de caquet.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'au Natal et au Transvaal.

Il n'avait pas encore été signalé dans cette région.

XXV. — Paridés.

64. Pentheres niger niger (Bonn. et Vieill.).

Parus niger Vieillot, *Nouv. Dict. H. N.*, XX, p. 325 (1818); Reichenow, *V. Afr.*, III, p. 510; Stark et Sclater, I, p. 307 (1900).
La *Mésange noire* de Levaillant.

Un *mâle* de *Guengère*, 40 mètres d'altitude; 5 juillet 1906 (n° 100). Nom cafre, *Timboue*.

Bec noir, pattes noires, iris marron clair. Longueur totale, $0^m,161$.

Rare. Insectes et graines dans le gésier.

Habite le sud de l'Afrique, jusqu'au Cunene à l'ouest et au Pangani à l'est. Signalé dans le Mashonaland, par Jameson et Ayres; à Tete, par Kirk; dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

XXVI. — Zostéropidés.

65. Zosterops anderssoni Shelley.

Zost. and. Shelley, *Br. Ornith. Club*, II (nov. 1892); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 429; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.* I, p. 300 (1900).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres, 5 juillet 1904 (n° 8).

Bec noir, pattes noires, œil blanc, pourtour de l'œil blanc. Longueur totale, 0^m, 115; aile, $0^m,60$; queue, 0^m, 045; bec, $0^m,010$.

Cet oiseau a un peu les mœurs du Pouillot d'Europe.

Habite le sud-ouest de l'Afrique et le sud-est, du lac Nyassa au Transvaal. Signalé à Salisbury, Mashonaland, par Alexander.

XXVII. — Nectariniidés.

66. Cinnyris venustus niassæ (Rchw.).

Certhia venusta Shaw, *Nodd. Nat. Miscell.*, X, Pl. 369 (1799).
Cin. affinis niassæ Reichenow, *Orn. Monatsb.*, p. 171 (1899).
Cinnyris venustus niassæ Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 674 (1905).

Un *mâle* jeune de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 1er août 1904 (n° 15).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,095.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 15 janvier 1905 (n° 61).

Cette forme est peu distincte de *C. venustus* typique.

Elle habite les environs du lac Niassa. Reichenow pense que les spécimens collectés par Alexander à Zumbo, sur le Zambèze, doivent être rapportés à cette forme.

67. Chalcomitra gutturalis (L.).

Certhia gutt. Linné, *Syst. Nat.*, p. 186 (1766).
Cinnyris gutt. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 286 (1900).
Chalcomitra gutt. Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 464 (1905).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude, 26 juin 1904 (n° 3).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,108.

Un *mâle* jeune de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude; 3 juillet 1904 (n° 7).

Bec noir, pattes noires, œil noir. La gorge commence à se teinter de rouge.

Cette espèce se rencontre ordinairement par couple.

Habite l'est de l'Afrique depuis le Natal jusqu'à l'Abyssinie. Signalé à Mapicuti, par Cavendish, à Salisbury, par Marshall, à Chiquaqua, par Sowerby, à Tete, Chupanga, par Kirk, sur le Zambèze, par Meller, à Zumbo, par Alexander.

68. Chalcomitra kirki (Shell.).

Cinnyris kirki Shelley, *Mon. Nect.*, p. 273, Pl. 85 (1876) ; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I p. 289 (1900).
Chalcomitra k. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 460 (1905).

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres, 4 août 1904 (n° 17).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,097. Se reconnaît facilement à l'absence de couleurs métalliques aux sus-caudales.

Habite le sud de l'Afrique, du Kikuja au Limpopo. Signalé à Zumbo. par Alexander, à Chupanga, par Kirk, à Mapicuti, par Cavendish, à Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury, par Marshall.

69. Cyanomitra olivacea (A. Sm.).

Cinnyris ol. Smith, *Ill. Zool. S. Afr.*, *Birds*, Pl. 57 (1859); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 293 (1900).
Chalcomitra ol. Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 449 (1905).

Un *mâle* (?) jeune de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude; 30 septembre 1904 (n° 41).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Les lores sont blanc jaunâtre. Longueur totale, 0m,145; bec, 0m,0235.

Habite le sud-est de l'Afrique. Signalé à Salisbury, par Marshall.

70. Anthotreptes collaris hypodilus (Jard.).

Nectarinia collaris Vieillot, *Nouv. Dict.*, XXXI, p. 502 (1819).
Nect. hypodilus Jardine, *Contr. ornith.*, p. 153 (1831).
Anthotr. coll. hyp. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 298 (1900).
Anthreptes coll. hyp. Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 443 (1905).
Le *Sucrier à cordon bleu* de Levaillant.

Un *mâle* juv. et un *mâle* ad. de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude; 30 juillet et 17 août 1904 (nos 10 et 14).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,090 et 0m,084. Sur le jeune, les barbes terminales des plumes de la gorge seules sont vertes; le demi-collier violet n'existe pas encore.

Habite l'Afrique tropicale du Sénégal à l'Angola, et du Nil blanc au Zambèze. Signalé à Chupanga et Sena, par Kirk, à Mapicuti, près Beira, par Cavendish.

XXVIII. — Motacillidés.

71. Anthus lineiventris Sund.

Anthus lin. Sundevall. *Oefv. Ak. Förh.*, p. 100 (1850); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 245; Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 309.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 27 juin 1904 (n° 5).

Bec jaune, pattes jaunes, œil noir. Longueur totale, 0m,175.

Oiseau qui se plaît dans les prairies montagneuses et les bas taillis.

Habite le sud de l'Afrique. A l'ouest sa présence a été signalée jusqu'à l'Angola et à l'est jusqu'au nord du lac Nyassa. N'avait pas encore été collecté dans le bassin du Pungoué. Je dois cette détermination à l'obligeance de M. le professeur Reichenow de Berlin.

72. Macronyx croceus (V.).

Alauda crocea Vieillot, *Nouv. Dict. H. nat.*, I. p. 305 (1816).
Mac. croc. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I. p. 239 (1900); Reichenow, *Vögel Afr.* III, p. 321 (1905).

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 17 février 1905 (n° 66).

Mandibule supérieure noirâtre, l'inférieure est couleur cornée, pattes grises, iris marron clair. Longueur totale, 0m,205.

Cet oiseau vit dans les plaines du Revoué.

Habite l'ouest de la Sénégambie à l'Angola, et l'est du Nil blanc supérieur au Natal. Rare dans la colonie du Cap. Signalé dans la vallée du Zambèze par Meller, à son embouchure, par Kirk, à Sena, par Alexander, à Beira, par Cavendish.

XXIX. — Fringillidés.

73. Serinus sharpei Neum.

Ser. sharpei Neumann, *J. f. O.* p. 287 (1900); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 266 (1905).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 1er septembre 1905 (n° 75).

Mandibule supérieure noirâtre, l'inférieure est jaunâtre ; pattes gris brun, iris marron. Longueur totale, 0m,145.

Habite l'est de l'Afrique, du lac Victoria au Zambèze. Signalé à Tete par Kirk. Son aire d'habitat s'étend donc au sud du Zambèze.

XXX. — Plocéidés.

74. Vidua serena L. [= V. principalis (L.)].

Emberiza serena Linné, *Syst. Nat.* p. 312 (1866).
Vidua princ. Stark et Sclater *Birds S. Afr.*, I, p. 145 (1900).
Vidua serena Reichenow, *Vög. Afr.*, III, p. 219 (1905).
La *Veuve dominicaine* de Vieillot.

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 26 décembre 1905 (n° 88).

Bec rouge, pattes grises, iris rouge. Longueur totale, 0m,287.

Vit en petites bandes de quatre à sept individus. M. Vasse l'a souvent observé aux grandes altitudes.

Habite presque toute l'Afrique au sud du Sahara. Signalé à Salisbury par Marshall, dans la vallée du Zambèze, par Meller et Alexander, à Tete, par Kirk.

75. Steganura paradisea (L.).

Emberiza par. Linné, *Syst. Nat.*, p. 178 (1758).
Vidua par. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, p. 149 (1900).
Steganura par, Reichenow, *Vögel Afr.* III, p. 223 (1905).
La *Veuve au colllier d'or* de Vieillot.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 10 février 1905 (n° 63). Bec noir, pattes noires, iris marron clair. Longueur totale, 0m,278.

Cet oiseau est granivore. Il niche dans les Graminées en janvier-février.

Habite l'Afrique au sud du Sahara et de l'Abyssinie. Signalé à Tete par Kirk, dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

76. Coliostruthus ardens (Bodd.).

Fringilla ardens Boddaert, *Tabl. Pl. Enl.*, 39 (1783).
Coliopasser ardens Stark et Sclater, *Birds S. Afr.* I, p. 147.
Coliuspasser ardens Reichenow, *Vögel Afr.* III, p. 135 (1904).

Un *mâle* d'*Andraba*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 8 janvier 1905 (n° 57).

Bec noir, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,350.

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude; 14 septembre 1904 (n° 27).

Bec gris, pattes jaunes, œil noir. Longueur totale 0m 135.

Oiseau vivant en bandes assez nombreuses dans les plaines couvertes de Graminées sur lesquelles il aime à se percher pour en manger les graines. Il nidifie dans les Graminées de janvier à février.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'au cours supérieur du Kir et jusqu'à Congo et à l'Angola. Signalé à Salisbury par Marshall, à Chupanga et Zumbo, par Alexander, à Tschibisa, par Kirk.

77. Urobrachya axillaris (Smith),

Vidua axill. A. Smith, *Ill. Zool. S. Afr.*, *Birds*, Pl. II (1838).
Urobrachya axill. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.* II, p. 134; Reichenow, *Vögel Afr.* III, p. 129.

Un *mâle* du *Tendo de l'Uréma*; 10 mars 1907 (n° 108).

Bec gris bleuté, pattes noires, iris marron très foncé.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'au Zambèze. Signalé à Mapicuti par Cavendish.

78. Pyromelana flammiceps (Sw.).

Euplectes flammiceps Swainson, *W. Afr.*, p. 186, Pl. 23 (1837).
Pyr. fl. Reichenow *Vögel Afr.*, III, p. 118 (1904).

Un *mâle* de *Guengère*, 40 mètres d'altitude; 14 février 1906 (n° 91), nom cafre, *Jojotcho*.

Bec noir, pattes grises, œil noir à bordure gris clair. Longueur totale, 0m,135.

On le trouve en plumage de noces en décembre; nidifie en février, en colonies. Le nid est placé généralement aux extrémités des branches de Mimosas, probablement pour éviter les serpents.

Habite l'ouest de l'Afrique depuis la Gambie jusqu'au Cuenza, et l'est, de l'Abyssinie au Zambèze. Signalé dans la vallée du Zambèze, par Alexander. Son aire d'habitat descend donc plus au sud.

79. Pyromelana capensis xanthomelas Rüpp.

Euplectes xanth. Rüppell, *N. Wirb. Vögel*, p. 94 (1835).
Pyromelana cap. xanthomelaena Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 133.
Euplectes xanthomelas Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 128.

Un *mâle d'Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres; 9 janvier 1905 (n° 58).

Mandibule supérieure noire, mandibule inférieure blanc jaunâtre, pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,133.

Une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, 750 mètres d'altitude; 10 janvier 1905 (n° 59).

Bec gris, pattes grises. Longueur totale, 0m,125.

Cet oiseau vit dans les plaines à Graminées élevées, sur lesquelles il aime à se percher pour en manger les graines.

Habite l'est de l'Afrique jusqu'au Mashonaland, ainsi que le sud-ouest de l'Afrique. Signalé à Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury, par Marshall.

80. Spermestes scutatus Heugl.

Sperm. scut. Heuglin, *J. f. O.* (1863), p. 18.
Spermestes scutatus Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 112; Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 150.

Un *mâle* et une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 17 août 1904 (nos 18 et 19).

Mandibule supérieure noire, mandibule inférieure gris ardoisé; pattes noires, œil noir. Longueur totale, 0m,081 et 0m,079.

Il vit en bandes dans les prairies à Graminées et se nourrit de leurs graines.

Habite l'Afrique, de l'Abyssinie au Natal, et les îles Comores. Signalé dans la vallée du Zambèze, par Meller.

81. Hypargus niveoguttatus (Peters).

Spermophaga niveoguttata Peters, *J. f. O.*, p. 133 (1868).
Lagonosticta niv. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 95.
Hypargos niveoguttata Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 157.

Une *femelle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 14 août 1904 (n° 16).

Bec gris bleu, pattes jaune foncé, œil noir à bordure grise. Longueur totale, 0m,120.

Il vit dans les broussailles où il mange des insectes et des graines. Son cri ressemble à celui de la Mésange huppée.

Habite l'est de l'Afrique, de Taita jusqu'au sud de l'Afrique portugaise. Signalé à Tete, par Alexander, à Mapicuti, par Cavendish.

82. Lagonosticta brunneiceps Sharpe.

Lagon. brun. Sharpe, *Cat. B. Brit. Mus.*, XIII, p. 213 (1890); Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 196; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 94.

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 2 septembre 1905 (n° 76).

Bec gris et corail, pattes grises, iris rouge. Longueur totale, 0m,105.

Granivore ; assez commun.

Habite l'est et le sud de l'Afrique. Signalé à Tete, par Kirk, et dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

83. Zonogastris melba (L.).

Fringilla melba Linné, *Syst. Nat.*, p. 180 (1758).
Pytilia melba Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 89.
Pytilia melba Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 163.
Zonogastris m. Sharpe, *Hand-list*, V. p. 434 (1909).

Un *mâle* et une *femelle* d'*Andrada*, vallée du Revoué; 7 et 12 janvier 1905; altitude, 750 mètres (nos 56 et 60).

Bec corail, pattes grises, iris rouge brique. Longueur totale, 0m,130 et 0m,120.

Vit dans les plaines où il se nourrit d'insectes et des graines des Graminées. Assez commun.

Habite l'est de l'Afrique, du lac Victoria-Nyanza et de Witu jus-

qu'au Natal et à l'ouest, de Loango au Damara. Signalé à Tete, par Kirk, dans la vallée du Zambèze, par Alexander.

84. Hypochœra amauropteryx Sharpe.

Hyp. am. Sharpe, *Cat. B. Brit. Mus.*, XIII, p. 309 (1890). –
Hyp. funerea amauroptera Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 153.
Hyp. am. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 215.

Un *mâle* de *Guengère*, 27 avril 1906 (n° 93).

Bec ivoire, pattes jaunes, iris marron clair. Nom cafre, *Chenga*. Longueur totale, 0m,122.

Assez rare. Il nidifie souvent en colonies avec le *Pyromelana flammiceps* (Sw.).

Habite l'est et le sud de l'Afrique. A l'ouest, on le trouve dans l'Angola et le Congo. Signalé à Sumba par Alexander, à Tete, par Kirk, et près du Zambèze par Bradshaw.

85. Estrilda astrild cavendishi Sharpe.

Estrilda cavendishi Sharpe, *Ibis*, p. 110 (1900).
Est. astrild.cav. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 179 (1904).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 16 octobre 1905 (n° 83).

Bec corail, pattes noires, iris orangé. Longueur totale, 0m,102.

Granivore. Assez commun.

Cette forme n'a été signalée qu'à Inhambane, par Peters, et à Mapicuti, près Beira, par Cavendish.

86. Estrilda incana Sund.

Estrilda incana Sundevall, *Œfv. Vet. Ak. Förh.*, p. 98 (1850); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 101; Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 192.

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 28 août 1905 (n° 71).

Bec gris bleu, pattes noires, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, 0m,120.

Vit en bandes et paraît affectionner les arbres en fleurs.

Habite le sud-est de l'Afrique. N'a pas encore été signalé dans les vallées du Zambèze et du Pungoué.

87. Uraeginthus bengalus angolensis (L.).

Fringilla bengalus Linné, *Syst. Nat.*, p. 182 (1758).
Fringilla angolensis Linné, *Syst. Nat.*, p. 182 (1758).
Estrilda angolensis Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 102 (part.).
Ur. beng. ang. Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 209.

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 16 octobre 1905 (n° 82).

Pattes grises, œil noir à bordure orange. Le culmen, les tomias et le gonys sont seuls noirâtres, le reste est plus ou moins rosé.

Granivore.

Habite le sud-est du lac Nyassa, le Natal et l'Angola. Signalé près du Zambèze, par Alexander et Holub, à Tete, par Kirk et Peters, à Salisbury, par Marshall, et à Mapicuti, par Cavendish.

88. Sycobrotus stictifrons (Fischer Rchw.).

Symplectes st. Fischer et Reichenow, *J. f. O.*, p. 373 (1885).
Sycobrotus st. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 73.
Ploceus (*Symplectes*) *st.* Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 33.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, 1.120 mètres d'altitude; 30 août 1904 (n° 29).

Bec gris bleu, pattes jaunes, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, $0^{m},160$.

Vit dans les fourrés où il se nourrit d'insectes et de fruits de lianes. Son chant rappelle celui du Pinson d'Ardennes.

Habite l'est de l'Afrique. N'a pas encore été signalé dans la région du Zambèze, mais Foa l'a récolté au nord du moyen Zambèze.

89. Hyphanturgus ocularius (Sm.).

Ploceus ocularius A. Smith, *Proc. S. Afr. Inst.* (1828), nov.; *Ill. Zool. S. Afr.*, Pl. 30 (1839).
Ploceus (*Hyphanturgus*) *oc.* Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 45.
Sitagra ocularia, Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 66.

Un *mâle* du *tendo du Pungoué*, 20 mètres d'altitude; 9 septembre 1906 (n° 105).

Bec noir, pattes noires, iris jaune très pâle. Vit de fruits et de graines.

Habite le sud-est de l'Afrique, depuis le Zambèze jusqu'au Cap. Signalé dans le bassin du Zambèze, par Kirk et Alexander.

90. Hyphantornis nigriceps Layard.

Hyph. nigr. Layard, *B. S. Afr.* (1867), p. 180; Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 56.
Ploceus (*Hyphantornis*) *nigr.* Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 62.

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 7 décembre 1905 (n° 86).

Bec mi-partie noire, mi-partie jaune, pattes jaunes, iris rouge. Longueur totale, $0^m,145$.

Niche en colonies aux extrémités des branches de Mimosas.

Habite le sud de l'Afrique jusqu'à l'Angola et au Victoria-Nyanza. Signalé près du Zambèze par Alexander, et Chapmann, au nord du moyen Zambèze, par Foa, à Tete, par Kirk.

91. Sitagra subaurea (A. Sm.).

Ploceus sub. A. Smith, *Pr. S. Afr. Inst.*, 1832, avril; *Ill. Zool. S. Afr.*, *Birds*, Pl. 30 (1841).
Hyphantornis subaur. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 63.
Ploceus (*Xanthophilus*) *subaur.* Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 90.

Un *mâle* d'*Andrada*, plaine du Revoué; 750 mètres d'altitude; 19 décembre 1904 (n° 48).

Bec gris jaune, pattes noires, œil noir, bordure orange. Longueur totale, $0^m,158$.

Habite le sud-est de l'Afrique. Pas signalé dans la région du Pungoué.

92. Sitagra cabanisi (Peters).

Hyphantornis cab. Peters, *J. f. O.*, p. 133 (1868); Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 57.
Ploceus (*Sitagra*) *cabanisi* Reichenow, *Vögel Afr.*, III, p. 73.

Un *mâle* du *tendo du Pungoué*, affluent de l'Uréma, altitude 20 mètres; 21 août 1906 (n° 103).

Bec noir, pattes noires, œil noir à bordure jaune pâle. Les Cafres n'ont pu dire son nom à M. Vasse.

Mange des graines et des insectes.

Habite l'est et le sud-ouest de l'Afrique. Signalé dans la vallée du Zambèze, par Alexander, au nord du moyen Zambèze, par Foa.

XXXI. — Sturnidés.

93. Perissornis carunculatus (Gm.).

Gracula carunculata Gmelin, *Syst. Nat.*, I, p. 399 (1788).
Dilophus car. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 23 (1900).
Perissornis car. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 670 (1903).
Le *Porte-lambeaux* de Levaillant.

Une *femelle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, altitude 40 mètres; 30 août 1905 (n° 74).

Bec marron noirâtre, pattes gris plombé. Longueur totale, 0m,210.

Vit en bandes, comme l'Etourneau, dont il a le vol.

Habite les steppes sud-orientales de l'Afrique et le sud de l'Arabie. Signalé à Chicowa, sur le Zambèze, par Alexander, à Tete, par Kirk, à Salisbury, par Marshall.

XXXII. — Eulabétidés.

94. Cinnyricinclus leucogaster verreauxi [(Boc.) Finsch Hartl.].

Pholidauges leucogaster Gmelin, *S. Nat.*, II, p. 819 (1788).
Pholidauges verreauxi Bocage *in* Finsch et Hartlaub, *Vögel Ost-Afr.*, p. 867 (1870).
Phol. leuc. verr. Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, I, p. 44 (1900).
Cinn. verr. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 680 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué; 25 décembre 1905 (n° 87).

Bec noir, pattes noires, iris jaune clair. Longueur totale, 0m,180. La couleur blanche de la vexille externe sur la rectrice externe s'arrête à un centimètre de l'extrémité.

Cet oiseau paraît très rare, car M. Vasse ne l'a aperçu qu'une seule fois.

Habite le sud et l'est de l'Afrique depuis le fleuve Orange jusqu'au Congo et à l'Ouganda. Signalé dans le Mashonaland, par Ayres et Jameson, à Salisbury, par Marshall, à Tete, par Kirk, dans le Mozambique, par Sperling.

95. Lamprocolius chalybaeus sycobius [Peters] Hartl.

Lamp. chal. Hemprich Ehrenberg *Symb. Phys.*, fol. Y, Pl. 10 (1828).
Lamp. sycobius [Peters] Hartlaub, *J. f. O.*, p. 19 (1859); Stark et Sclater, *Birds S. Af.*, I, p. 41 (1900).
Lamp. chal. syc. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 688 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, 40 mètres d'altitude; 23 avril 1906 (n° 92).

Bec noir, pattes noires, iris orange. Longueur totale, 0m,210, aile,

0^m, 114, queue, 0^m,075, bec, 0^m,018, tarse, 0^m,026. Dimensions plus petites que celles de *L. chal.* typique.

Ces oiseaux vivent en bandes nombreuses et sont très farouches. Ils sont amateurs de piment. Leur vol rappelle celui de l'Etourneau. Ils semblent être de passage dans la région; les bandes apparaissent au commencement de novembre, et elles se séparent en janvier, après l'appariement pour la construction des nids.

Habitent l'est et l'ouest de l'Afrique jusqu'au Mossamedès et à Mombas. Signalé à Tete, par Peters, Kirk et Alexander, à Salisbury, par Marshall.

XXXIII. — Oriolidés.

96. Oriolus larvatus rolleti Salvad.

Oriolus larvatus Lichstenstein, *Verz. Doubl.*, p. 20 (1823).
Oriolus rolleti Salvadori, *Atti Soc. Ital. Sc. nat.*, VII, p. 161 (1864).
Or. larv. roll. Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 659 (1903).

Un *mâle* de *Guengère*, vallée du Pungoué, 40 mètres d'altitude; 12 août 1905 (n° 70).

Bec gris bleu, pattes noires, iris rouge. Longueur totale, 0^m,220; aile, 0^m,125; queue, 0^m,085; bec, 0^m,023; tarse, 0^m,021.

Un *mâle* de la vallée du *Muza*, altitude 1.120 mètres; 6 septembre 1904 (n° 33).

Bec gris rosé, pattes noires, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, 0^m,230; aile, 0^m, 130; queue, 0^m,085; bec, 0^m,024; tarse, 0^m,024. Le noir de la tête s'étend plus bas sur la nuque et le jugulum.

Assez rare partout. Frugivore et insectivore. Il vit dans les ravins. M. Vasse l'a rencontré une fois en pays montagneux, à 1.100 mètres d'altitude, dans le Manica.

Habite le sud-ouest et l'est de l'Afrique. Signalé à Tete et à l'embouchure du Zambèze, par Kirk, au nord du moyen Zambèze, par Foa, à Sena, sur le bas Zambèze, par Alexander, à Chiquaqua, par Sowerby, à Salisbury par Marshall.

XXXIV. — Dicruridés.

97. Buchanga assimilis (Bechst).

Corvus assimilis Bechstein, *Lath. Allg. Uebers.* II, p. 562; voir Oberholser, *Proc. U. S. Nat. Mus.*, vol. XXVIII, p. 919 (1905).
Dicrurus afer Stark et Sclater, *Birds S. Afr.*, II, p. 265 (1901); Reichenow, *Vögel Afr.*, II, p. 647 (1903).
Le *Drongear* de Levaillant.

Un *mâle* d'*Andrada*, vallée du Revoué, altitude 750 mètres ; 27 décembre 1904 (n° 51).

Bec noir, pattes noirs, œil noir à bordure rouge. Longueur totale, $0^{m},246$.

Oiseau insectivore, commun dans tout le territoire à toutes les altitudes.

Habite presque toute l'Afrique au sud du Sahara. Signalé à Salisbury (« Mindirira »), par Marshall, à Chiquaqua, par Sowerby, à Tete, par Peters et Kirk, au nord du moyen Zambèze, par Foa, et au Mozambique, par Cardoso.

LISTE DES PRINCIPAUX OUVRAGES RÉCENTS CONSULTÉS

1864. Kirk, John, *On the Birds of the Zambesi Region of Eastern tropical Africa* (*Ibis*, p. 307 à 339).

1882. Shelley et Ayres, *On a Collection of Birds made by Mr. J. S. Jameson in South-Eastern Africa*, with notes by Mr. T. Ayres, by Captain G., E. Shelley (*Ibis*, p. 236 à 265, p. 349 à 368, Pl. VII).

1898. Sowerby, J. L., *On a Collection of Birds from Fort Chiquaqua, Mashonaland*, with notes by R. B. Sharpe (*Ibis*, p. 567 à 575, Pl. XII).

1899. Alexander, *An Ornithological Expedition to the Zambesi River* (*Ibis*, p. 549 à 584, Pl. XI).

1900. Alexander, *Ibis*, p. 70-109, Pl. I ; p. 424 à 458.

1900. Sharpe, Bowdler, *On a Collection of Birds obtained by Mr. H. S. H. Cavendish in Mozambique* (*Ibis*, p. 109 à 115).

1900. Marshall, Guy, A. K., *Notes on Mashonaland Birds* (*Ibis*, p. 221 à 271).

1900-1906. Stark (completed by W. L. Sclater), *The Birds of South Africa*, t. I, 1900 ; II, 1901 ; III, 1903 ; IV, 1906.

1900-1905. Reichenow, Ant., *Die Vögel Africas*, I, 1900-1901 ; II, 1902-1903 ; III, 1904-1905.

Catalog of Birds of Bristish Mus., divers volumes.

1899-1909. Sharpe, *Hand-list of the genera and species of Birds.*

PRÉSENTATION A LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Par M. Ernest LEBON

DE SON OUVRAGE [1] INTITULÉ :

SAVANTS DU JOUR :

ÉMILE PICARD, BIOGRAPHIE, BIBLIOGRAPHIE DES ÉCRITS

Séance du 23 *Juillet* 1910.

En présentant ce Livre à l'Académie des Sciences, dans la Séance du 20 juin 1910, M. GASTON DARBOUX, secrétaire perpétuel, s'est exprimé en ces termes :

« J'ai l'honneur de présenter à l'Académie un nouveau volume de la Collection des *Savants du jour* entreprise par M. Ernest Lebon. Ce volume est consacré au Président actuel de l'Académie des Sciences, M. EMILE PICARD.

« Comme les volumes précédents, celui-ci se recommande par une abondance dans les informations, une sûreté dans les renseignements de toute nature qui feront de la Collection de M. E. Lebon le guide le plus précieux pour les futurs historiens de la Science.

« J'y signalerai plus particulièrement la charmante Notice biographique qui ouvre le volume. Elle nous fait connaître la jeunesse de M. EMILE PICARD, ses premières études et ses succès, puis ses découvertes et les principaux incidents de sa belle carrière scientifique. Elle insiste, comme il convient, sur les incursions que notre Président a faites dans le domaine de la philosophie des sciences et, plus particulièrement, sur le beau Rapport qu'il fut amené à écrire en 1900 sur l'ensemble du progrès scientifique, à la demande du Commissaire général de l'Exposition universelle internationale, notre confrère Alfred Picard. »

J'ai fait précéder la Section des *Fonctions et Surfaces algébriques* d'appréciations dues à MM. HENRI POINCARÉ et FEDERIGO ENRIQUEZ, et la Section de *Philosophie scientifique et Histoire des Sciences*

[1] Un volume in-8 (28-19) de VIII-80 pages, papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure. 1er juin 1910.

d'appréciations dues à MM. Alfred Picard et Lucien Poincaré, afin de faire connaître mieux l'Œuvre de M. Emile Picard et de faire oublier la sécheresse inévitable de suites d'énumérations de titres d'Ecrits, bien que ces titres soient le plus souvent accompagnés de sobres explications.

Il importe de faire remarquer que M. Emile Picard, après avoir lu mon manuscrit, a bien voulu me donner de précieux conseils pour le classement des Mémoires et des Notes, et qu'il a aussi lu et approuvé la dernière épreuve d'imprimerie de cet Opuscule.

Je demande la permission de résumer quelques-uns des passages de la Notice que j'ai placée en tête de cet Opuscule.

Ayant soutenu brillamment en Sorbonne, le 16 juin 1877, sa thèse de Docteur ès sciences mathématiques, ayant été admis premier au Concours d'agrégation des Sciences mathématiques, le 18 septembre 1877, M. Emile Picard se trouvait, à l'âge de 21 ans seulement, en possession des deux diplômes qui, obtenus dans de si honorables conditions, permettent d'aspirer aux plus hautes situations universitaires.

Du 29 janvier 1877 au 23 septembre 1889, M. E. Picard avait publié 117 Notes et Mémoires d'Analyse pure et appliquée. A partir de l'année 1881, l'Académie des Sciences l'avait plusieurs fois regardé comme digne d'entrer dans son sein ; en 1886, elle lui avait accordé le Prix Poncelet pour l'ensemble de ses travaux mathématiques ; en 1888, elle lui avait décerné, d'après les conclusions d'un très élogieux Rapport de M. *Henri Poincaré*, le Grand Prix des Sciences mathématiques pour son célèbre Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques. Aussi parût-il tout naturel qu'elle lui accordât, le 11 novembre 1889, un fauteuil dans la Section de Géométrie. C'est grâce à des travaux scientifiques du premier ordre que M. E. Picard obtint cette distinction à un âge (33 ans) où bien des chercheurs commencent seulement à se faire connaître et apprécier. Ce succès ne ralentit pas son ardeur.

Plusieurs des questions dont M. E. Picard s'est occupé sont désignées par son nom. Au début de la théorie des fonctions entières, se trouvent deux principes que plusieurs géomètres ont appelés *Théorèmes de Picard*. Le groupe de transformations de points dans l'espace situé d'un même côté d'un plan a été nommé *Groupe de Picard* par MM. R. Fricke et Félix Klein. Une classe de surfaces hyperelliptiques a été désignée par M. *Henri Poincaré* sous la dénomination de *Surfaces de Picard*. Beaucoup de mathématiciens ont appliqué le nom d'*Intégrales de Picard* aux intégrales de différentielles

totales de seconde espèce et de troisième qui jouent un rôle si important dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.

Rappelons que c'est au prix de grandes fatigues de l'esprit que M. E. Picard est parvenu à établir par l'analyse, en 22 années, cette théorie dont plusieurs points sont à présent abordés géométriquement par d'illustres géomètres italiens.

Ne se bornant pas à la tâche si difficile d'étendre le domaine des Mathématiques, M. E. Picard a présenté avec une haute compétence l'histoire philosophique des conquêtes de l'esprit humain pendant la seconde moitié du XIXe siècle, dans des Conférences en Amérique et dans son Rapport intitulé *Sciences*, écrit, sur la demande du Gouvernement Français, pour faire partie de l'Introduction générale aux rapports du Jury international de l'Exposition universelle de 1900, à Paris.

Tours, imprimerie Deslis Frères, 6, rue Gambetta.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE II-III

	Pages
Extraits des comptes rendus des séances	65
Banquet annuel	68
H. Coutière. — Les crevettes à mâles dimorphes du genre *Saron*	71
Camille Matignon. — Sur la dissociation de la molécule d'iode	88
A. Menegaux. — Sur les oiseaux sédentaires dans les bassins du Pungoué et du bas Zambèze	93
Ernest Lebon. — Présentation à la Société Philomathique de Paris	136

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série : 1789-1805	3 volumes in-4°	
2e série : 1807-1813	3 volumes in-4°	
3e série : 1814-1826	13 fascicules in-4°	
4e série : 1832-1833	2 volumes in-4°	
5e série : 1836-1863	28 fascicules in-4°	
6e série : 1864-1876	13 fascicules in-8°	
7e série : 1877-1888	11 volumes in-8°	

Chaque année pour les Membres de la Société ..... 5 francs
— pour le public ..... 12 —

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

A L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à : MM. Désiré André; E. Becquerel, de l'Institut; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut; Bouty, de l'Institut; Bourgeois; Descloizeaux, de l'Institut; Fouret; Gernez; Hardy; Haton de La Goupillère, de l'Institut; Laisant; Laussedat; Léauté, de l'Institut; Mannheim; Moutier; Peligot, de l'Institut; Pellat; — *pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix; Bureau; Bouvier, de l'Institut; Chatin, de l'Institut; Drake del Castillo; Duchartre, de l'Institut; H. Filhol, de l'Institut; Franchet; Grandidier, de l'Institut; Henneguy, de l'Institut; Milne-Edwards, de l'Institut; Mocquard; Poirier; A. de Quatrefages, de l'Institut; G. Roze; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ, A LA SORBONNE

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES, 6, RUE GAMBETTA.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

FONDÉE EN 1788

SÉRIE X. — TOME II

N° 4-5-6

1910

Smithsonian Institution
APR 29 1911
National Museum.

PARIS

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

A LA SORBONNE

—

1910

Le Secrétaire-Gérant,
H. COUTIÈRE.

Le Bulletin paraît par livraisons bimestrielles.

COMPOSITION DU BUREAU POUR 1910

Président : M. C. Matignon, 17, B^d Carnot, Bourg-la-Reine.
Vice-Président : M. Hua, 254, boulevard Saint-Germain.
Trésorier : M. Rabaud, 3, rue Vauquelin.
Secrétaire des séances : M. Winter, 44, rue Saint-Placide.
Vice-Secrétaire des séances : M. Lebon, 4 *bis*, rue des Écoles.
Secrétaire du Bulletin : M. Coutière, 118, avenue d'Orléans.
Vice-Secrétaire du Bulletin : M. Neuville, 55, rue de Buffon.
Archiviste : M. Henneguy, 9, rue Thénard.

La Société Philomathique de Paris se réunit les 2e et 4e Samedis de chaque mois, à 8 h. 1/2, à la Sorbonne (salle de travail des Étudiants).

Les membres de la Société ont le droit d'emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Université. Ils ont également droit, sur leur demande, à 50 tirages à part gratuits des Mémoires qu'ils publient dans le *Bulletin*.

Pour le paiement des cotisations et l'achat des publications, s'adresser à M. Vézinaud, à la Sorbonne, place de la Sorbonne, Paris, V^e.

EXTRAITS DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES

Séance du 23 *juillet* 1910.

Présidence de M. Matignon.

M. Lebon présente son Ouvrage intitulé : *Savants du jour :* Emile Picard.

Séance du 23 *octobre* 1910.

Présidence de M. Matignon.

M. le Président annonce que la souscription pour la médaille de la Société est ouverte.

Séance du 12 *novembre* 1910.

Présidence de M. Matignon.

M. Berthelot fait une conférence sur les *Effets chimiques des rayons ultra-violets.*

M. Leau lit son *Rapport sur l'œuvre de la délégation pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale.*

Séance du 26 *novembre* 1910.

Présidence de M. Matignon.

M. le Président signale l'ouvrage de M. Lebon, intitulé : *Savants du jour :* Paul Appell.

M. Victor Henri fait une conférence sur les *Actions biologiques des rayons ultra-violets.*

M. Nicolardot expose des *Expériences relatives aux alliages des métaux rares et les applications de ces alliages.* Il décrit le *briquet à l'alliage Auer.*

Séance du 24 décembre 1910.

Présidence de M. Matignon.

M. P. Lemoine fait une communication sur les *Irrégularités du niveau de l'eau dans la nappe aquifère du lutécien à Paris.*

M. Lebon résume un Mémoire où il expose le *calcul avec une équation indéterminée des caractéristiques entrant dans une Table de facteurs premiers des grands nombres.*

Seance du 14 janvier 1911.

1re partie : Présidence de M. Matignon.

M. Servant est élu Vice-Président de la Société pour l'année 1911.

M. Lebon est élu Secrétaire des séances pour les années 1911 et 1912.

M. Fauret-Frémiet est élu Vice-Secrétaire des Séances pour les années 1911 et 1912.

M. Rabaud est élu Trésorier de la Société pour l'année 1911.

M. Coutière reste Secrétaire du *Bulletin.*

2e partie : Présidence de M. Hua.

M. Michel fait une commmunication sur l'autotomie et la régénération du *corps et des élytres et sur la structure des élytres chez les Annélides Polynoïdiens.*

M. Deschamps fait une communication sur *la Thermométrie.*

Séance du 28 *janvier* 1911.

Présidence de M. Hua.

M. Matignon fait une communication sur l'*Azote contenu dans la houille et sa récupération à l'état d'ammoniaque.*

Séance du 11 *février.*

Présidence de M. Hua, président.

Une commission composée de MM. Coutière, Launoy, Guieysse, rapporteur, est chargée d'examiner les titres des candidats à la place vacante dans la troisième section.

M. J. Deschamps expose un perfectionnement à une méthode de construction de table de nombres premiers.

M. Fauret-Frémiet fait une communication sur les mitochondries des Foraminifères.

DÉFINITION ET MESURE DES TEMPÉRATURES PAR LES INTENSITÉS CALORIFIQUES ;

Par M. le Dr Joseph DESCHAMPS.

I

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

La question de la mesure des températures est, comme toute question de mesure, très délicate, tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique. En laissant de côté ce dernier point de vue pour concentrer toute notre attention sur le terrain des principes, nous rappellerons que toute mesure de grandeur doit être précédée de la définition de la grandeur à mesurer en tant que *grandeur mathématique*, c'est-à-dire en tant que grandeur susceptible d'être *égalée* et *ajoutée* à une autre grandeur de même espèce. C'est à cette double condition seulement que l'opération de la mesure devient possible, et toute tentative faite en dehors de cette règle inéluctable reste illusoire et sans portée.

Cette même règle doit donc être appliquée avec soin et avec rigueur, dans le cas des températures, et cela est d'autant plus indispensable que le thermomètre est devenu un instrument aussi nécessaire et aussi fréquemment employé que l'unité de mesure de longueur.

Aussi avons-nous trouvé, à notre plus profond étonnement, un avis tout contraire, exprimé par un physicien distingué dans un traité devenu classique :

« Beaucoup de savants, dit-il, réservent le nom de grandeurs mesurables aux grandeurs dont on peut définir l'égalité et l'addition. D'après cette définition, on n'a pas idée d'une température qui serait double ou triple d'une autre ; on ne pourrait donc mesurer les températures, on pourrait seulement les repérer. Mais en physique, il y a bien peu de grandeurs mesurables au sens propre du mot ; souvent, d'ailleurs, il suffit de particulariser la définition d'une grandeur au lieu de lui laisser toute généralité pour en faire une grandeur susceptible d'addition. C'est ce qui pourrait être fait pour la température. Aussi la distinction entre les grandeurs mesurables

et les grandeurs non mesurables est-elle un peu subtile; c'est pourquoi, conformément à l'usage, nous continuerons à employer l'expression *mesurer une température* [1]. »

Il est impossible de souscrire aux idées émises dans la précédente note. D'abord il n'y a aucune transaction à admettre sur la distinction entre les grandeurs non mesurables et les grandeurs mesurables et sur la nature de ces dernières. *Tous* les théoriciens sont d'accord sur la définition des grandeurs mesurables qui sont celles dont on peut définir l'égalité et l'addition et qui sont par suite les seules à la considération et à l'étude desquelles on puisse appliquer les théories mathématiques basées elles-mêmes sur la double idée d'égalité et d'addition. La distinction entre les grandeurs mesurables et les grandeurs non mesurables est donc loin d'être subtile, ainsi que le prétend cet auteur; et de plus toute grandeur non mesurable, ou même simplement non mesurée, est tout au plus susceptible d'appréciation. C'est pourquoi, malgré l'usage trop fréquemment adopté et contrairement à la conclusion de la citation qui vient d'être faite, nous dirons qu'il n'est pas possible actuellement de mesurer les températures, précisément parce que nous n'avons pas l'idée d'une température double ou triple d'une autre, et que par conséquent les températures ne sont pas des grandeurs mesurables. La seule chose permise dans les circonstances présentes, c'est l'appréciation ou le simple repérage des températures, conformément à l'avis d'autres physiciens nombreux et non moins distingués, à la condition toutefois de définir la température d'un corps en disant qu'elle représente l'*état* dans lequel se trouve ce corps par suite de son échauffement.

Il ne faut pas cependant perdre de vue que, par suite de l'arbitraire que comporte toujours une définition de mot, le terme de température peut être employé dans une acception différente, laquelle est susceptible d'entraîner une opération de mesure. C'est ainsi que, si nous convenons, avec Verdet, d'appeler « température d'un système, soit l'expression numérique du volume que possède le thermomètre faisant partie de ce système, soit une fonction quelconque, mais définie de cette expression, il est clair d'une part que, sous cette appellation, la température est susceptible d'être mesurée, et, d'autre part, que le mot *température* ainsi entendu n'a aucune signification mystérieuse que les progrès ultérieurs de la science puissent éclaircir

[1] H. Pellat, *Leçons de Thermodynamique*, introduction, note page 9 (Paris, Gauthier-Villars).

et qu'on doive aujourd'hui se contenter de sentir d'une façon plus ou moins vague [1]. »

Malheureusement il est pour ainsi dire impossible de se confiner dans la définition stricte qui vient d'être donnée. D'abord l'instrument de mesure des températures, qui n'est autre jusqu'à présent qu'un instrument de mesure de volume, porte et conserve le nom de *thermomètre*, en sorte que, par la force même du mot, l'esprit se trouve entraîné en dehors des limites qu'il s'était fixées et qu'il a une tendance presque invincible à reporter la mesure des volumes ou des variations de volume jusqu'à la cause même de ces variations, c'est-à-dire à la chaleur. De plus, quelques précautions qu'on prenne, il est impossible d'écarter cette idée dominante de chaleur dans toutes les circonstances où l'on a à faire usage du thermomètre. Cela serait peut-être possible si le thermomètre était un simple instrument d'indication comme il l'est dans ses emplois industriels. Mais, dans l'étude théorique des phénomènes calorifiques, on ne peut vraiment pas faire abstraction de leur cause efficiente, si cachée qu'elle le soit.

Or, malgré le mystère qui enveloppe encore la nature de la chaleur, celle-ci apparaît avec tous les caractères d'une véritable grandeur. Elle est susceptible d'être égalée, cela ne fait aucun doute pour personne, mais elle est aussi susceptible d'addition. Lorsqu'un corps s'échauffe ou, si l'on veut, lorsque sa température s'élève, c'est qu'une nouvelle quantité de chaleur vient s'ajouter à celle qu'il possède déjà, en sorte que l'élévation de température est corrélative de l'augmentation de chaleur. Voilà pourquoi notre esprit ne s'arrête pas à l'effet, mais remonte à la cause qu'il voudrait atteindre et mesurer. Mais la difficulté reste alors entière, car cette cause n'est pas directement saisissable dans sa véritable nature; seuls ses effets sont observables, ainsi que cela arrive pour beaucoup d'autres causes et dans d'autres circonstances, et c'est peut-être pourquoi l'auteur de la note citée plus haut dit qu'il y a en physique bien peu de grandeurs mesurables au sens propre du mot. Il aurait plutôt raison de dire qu'il y a peu de grandeurs directement saisissables, ce qui entraîne évidemment une difficulté, sinon une impossibilité de mesure, d'autant plus que les grandeurs directement saisissables sont souvent difficilement mesurables, leurs mesures ne pouvant être obtenues que par des procédés plus ou moins détournés, ainsi qu'on le constate par de nombreux exemples en géométrie.

[1] Verdet, *Cours de Physique de l'École Polytechnique*, t. I, p. 5 (Paris, Imprimerie nationale).

Cependant difficulté ne veut pas dire impossibilité, et, bien que jusqu'à présent on n'ait pas réussi à mesurer la chaleur au sens propre du mot, ce n'est pas, pensons-nous, une raison pour croire celle-ci hors de notre atteinte. Rappelons-nous d'ailleurs que, dans un autre ordre d'idées, en mécanique pure, on retrouve un élément grandeur, savoir la Force, qui, malgré les apparences contraires, n'est pas lui non plus directement saisissable et ne se manifeste que par ses effets, dont le principal et le plus manifeste est le mouvement. Et cependant la Force a pu être mesurée moyennant, il est vrai, un luxe de précautions, d'hypothèses et peut-être d'artifices; mais enfin la chose a été faite en dépit des difficultés qu'elle pouvait présenter.

Il n'est donc ni déraisonnable ni inutile de chercher à mesurer en elle-même la chaleur, cause de phénomènes calorifiques dont plusieurs sont directement observables et mesurables. Sans doute la mesure des températures, telle qu'elle est actuellement réalisée, permet d'établir des relations de dépendance entre les phénomènes observés et les variations de volume du thermomètre; mais il serait certainement plus intéressant et aussi plus utile de connaître la relation directe entre les grandeurs des phénomènes et celle de leur cause véritable. Les procédés employés actuellement rentrent dans la catégorie des méthodes désignées en mathématiques pures sous le nom de changements de variables, lesquels sont non seulement légitimes, mais très souvent commodes et utiles en ce qu'ils permettent la substitution à la variable naturelle d'une variable nouvelle présentant des avantages particuliers. Toutefois ces procédés ne dispensent pas du retour à la variable fondamentale; au contraire, ils le supposent et même l'exigent.

Ainsi doit-il en être en ce qui concerne l'étude des phénomènes thermiques. Il est d'ailleurs tout un ensemble de cas où ce retour à la variable naturelle s'impose : c'est lorsqu'il s'agit de la mesure des quantités de chaleur et de leurs relations avec les variations et les déplacements de la cause fondamentale de leur production ou de leur disparition. Les effets produits sont ici de même nature que la cause et ne peuvent être comparés qu'à elle; aussi leur comparaison avec une chose si dissemblable, savoir le volume de la substance thermométrique, produit une impression pénible qui résulte de l'association de choses disparates, impressions qu'il est désirable au suprême degré de pouvoir dissiper. Et non seulement l'impression est pénible; mais encore, par le fait de cette association contre nature, la calorimétrie et la thermodynamique tout entière restent dans une véritable détresse, et cela malgré l'introduction factice de

la notion de température absolue, qui indique une tentative dans la voie que nous indiquons, tentative logique et nécessaire mais encore infructueuse, car, en dépit de leur nom pompeux, les températures absolues ou encore thermodynamiques représentent, à un facteur constant près, les divers volumes du thermomètre.

Dans l'état actuel des choses, le but du présent travail est de chercher à combler cette lacune de la thermométrie et de proposer une méthode permettant d'atteindre et de mesurer la chaleur en tant que cause des phénomènes thermiques.

II

DÉFINITION DE LA TEMPÉRATURE PAR L'INTENSITÉ CALORIFIQUE.

Les considérations qui vont suivre s'appliquent exclusivement aux gaz qui constituent les substances thermométriques ; cette application est d'ailleurs restreinte aux limites dans lesquelles ils peuvent être considérés non seulement comme gaz, mais encore comme gaz parfaits. Par la première condition, leur volume ne peut descendre au-dessous de celui qu'ils peuvent occuper lorsque, étant pris en masse finie et déterminée, ils arrivent par suite du refroidissement à leur température critique. Par suite de la deuxième condition, nous nous interdisons même de les considérer dans un voisinage trop rapproché de cette température critique, où ils cessent de présenter les propriétés des gaz parfaits. En d'autres termes, nous n'avons en vue que les gaz parfaits, c'est-à-dire ceux qui obéissent à peu près rigoureusement aux deux lois de Mariotte et de Gay-Lussac, et parmi eux, plus spécialement l'hydrogène, dont la molécule est diatomique.

Cela étant, considérons une certaine masse d'hydrogène, prenons-la dans un état où elle occupe un certain volume v et où elle est soumise à une pression p. Elle se trouve en même temps dans un certain état calorifique, que nous appellerons la température et qui dépend de la quantité de chaleur qu'elle contient. En raison de l'homogénéité de la masse, cet état calorifique est complètement défini par la quantité de chaleur contenue dans l'unité de volume de ce gaz.

D'après cela, nous appellerons *intensité calorifique, à un instant donné, la quantité de chaleur contenue dans l'unité de volume du gaz considéré à cet instant.*

Cette intensité définit la température du gaz à l'instant considéré.

III

PROPRIÉTÉS DE L'INTENSITÉ CALORIFIQUE.

Nous nous proposons de montrer que l'intensité calorifique ainsi définie possède les caractères d'une grandeur mesurable.

1° *L'intensité calorifique est susceptible d'addition.* — Considérons une masse gazeuse, de volume v, de pression p et portée à une température définie par une intensité calorifique que nous désignerons par I. Échauffons ce gaz en le maintenant au volume constant v, moyennant un accroissement convenable de pression. Quand l'opération sera terminée, le gaz aura reçu une certaine quantité de chaleur qui s'est répartie uniformément dans tout son volume ; il en résulte que chaque unité du même volume a reçu une certaine quantité de chaleur, que nous désignerons par i et qu'il est naturel de regarder comme s'ajoutant à la précédente. La nouvelle température du gaz est donc définie par une nouvelle intensité calorifique I′ plus grande que l'intensité I et dont la valeur est :

$$I' = I + i.$$

2° *Il est possible de trouver le rapport de deux intensités calorifiques.* — Considérons encore un gaz possédant un volume v, une pression p, une intensité calorifique I, et soumettons-le à une compression adiabatique qui amène son volume à n'être, par exemple, que la moitié du volume primitif. Comme dans cette compression adiabatique, le gaz est par hypothèse soustrait à l'action de toute source de chaleur, il n'a ni reçu ni perdu aucune quantité de chaleur.

La chaleur qu'il possédait primitivement et qui était uniformément répartie dans le volume v se trouve maintenant renfermée tout entière dans le volume $\frac{v}{2}$. Il en résulte nécessairement que chaque unité de volume contient une quantité de chaleur deux fois plus grande qu'avant la compression. Le gaz possède donc maintenant une intensité calorifique 2I, et cela explique l'élévation de température qui accompagne une compression adiabatique. Seulement, alors qu'il est tout à fait légitime de dire que l'intensité calorifique a doublé, il est impossible de dire la même chose de la température.

Plus généralement, si par l'effet de la compression adiabatique, le

volume de la masse gazeuse devient $\frac{v}{3}, \frac{v}{4}, \ldots, \frac{v}{m}$, on voit de la même manière que l'intensité calorifique prend les valeurs 3I, 4I, ..., mI.

De la même manière, si le gaz, au lieu d'être comprimé, est décomprimé adiabatiquement et si son volume devient successivement $2v$, $3v$, $4v$, ..., mv, l'intensité calorifique passe par les valeurs $\frac{v}{2}, \frac{v}{3}, \frac{v}{4}, \ldots, \frac{v}{m}$.

On conclut de tout cela l'énoncé suivant :

Quand on considère une même masse gazeuse avant et après une compression ou une décompression adiabatique, les intensités calorifiques correspondant à ces deux états sont en raison des volumes que possède le gaz au commencement et à la fin de l'opération.

Donc, en désignant par v le volume initial, par v' le volume final, par I la première et par I′ la seconde intensité calorifique, on a :

$$\frac{I'}{I} = \frac{v}{v'},$$

égalité qui définit le rapport des deux intensités calorifiques I et I′.

3° *Il est possible de réaliser deux intensités calorifiques égales;* en d'autres termes, *il est possible de définir l'égalité de deux intensités calorifiques.* — Nous ne voulons pas parler ici simplement des intensités calorifiques qui se trouvent dans chaque unité de volume d'une même masse gazeuse à l'état d'équilibre et qui sont manifestement égales. Nous ne voulons pas non plus nous arrêter aux intensités calorifiques de deux masses gazeuses séparées, mais supposées dans les mêmes conditions de volume, de pression et de température, cette dernière pouvant être constatée à l'aide d'un thermomètre quelconque ni des intensités calorifiques qui appartiennent à une même masse gazeuse avant et après une opération qui la ramène à son état initial. Dans ces deux cas, l'égalité apparaît encore d'elle-même.

Nous voulons nous occuper d'un cas plus complexe dans lequel une même masse gazeuse peut conserver la même température en changeant à la fois de volume et de pression. L'égalité d'intensité calorifique correspondant à ces deux états est en effet loin d'apparaître immédiatement, et cependant elle doit encore ici se réaliser pour que nous puissions toujours définir la température d'un gaz par son intensité calorifique, quels que soient son volume et sa tension.

Considérons donc une masse gazeuse de volume v, de pression p

et à une température à laquelle correspond une intensité calorifique I. Soumettons ce gaz à une dilatation isothermique qui lui donnera un volume $v' > v$, et une pression $p' < p$, tout en lui conservant la même température constatée à l'aide d'un même instrument. On sait que ce processus isothermique ne peut être réalisé que si le gaz est en communication avec une source calorifique qui, dans le cas présent, lui fournit de la chaleur. Il ne s'agit donc plus ici de la même quantité de chaleur différemment répartie comme dans la seconde proposition, ni de quantités différentes de chaleur réparties dans le même volume, comme dans la première. Il y a ici tout à la fois inégalité de chaleur et inégalité de répartition, à la suite desquelles l'intensité calorifique ne doit pas être modifiée.

Pour analyser ce qui se passe dans cette modification isothermique, partageons-la en phases pour chacune desquelles les variations de volume et de pression sont infiniment petites, et examinons la manière dont s'accomplit chacune d'elles.

Au lieu de faire une seule modification qui nous fera passer du volume v au volume $v + dv$ et de la pression p à la pression $p - dp$, en laissant la température constante, imaginons qu'on fasse d'abord subir au gaz une dilatation adiabatique qui l'amènera au volume $v + dv$, en abaissant sa température, c'est-à-dire en diminuant son intensité calorifique, et qui ne le conduira pas à la pression $p - dp$, mais une pression $p - dp_1 < p - dp$, puis que l'on échauffe le gaz au volume constant $v + dv$ jusqu'à rétablir la température primitive et à produire la pression finale $p - dp$. Dans cette seconde partie de l'opération, la source environnante fournit de la chaleur au gaz, et pendant cette distribution chaque unité du volume $v + dv$ prendra à la source une certaine quantité de chaleur en vertu de laquelle son intensité calorifique, qui avait passé de la valeur I à la valeur $I - dI$ pendant la première partie adiabatique de l'opération, remonte à une valeur plus grande. Nous *admettrons* (car rien ne le prouve rigoureusement) que, par suite de cet échauffement, chaque unité de volume récupère exactement la quantité de chaleur dI qu'elle avait perdue dans son refroidissement adiabatique. Par suite de cette hypothèse, qui paraît absolument légitime, lorsque la température est revenue à la valeur primitive, l'intensité calorifique a repris la valeur primitive I, en sorte que, dans ces conditions nouvelles, à la même température correspond encore la même intensité calorifique.

La même chose ayant lieu pour toutes les phases comprenant le processus isothermique considéré, nous sommes autorisés à dire que :

Quelles que soient les conditions de volume et de pression d'un gaz, toutes les fois qu'il se trouve à une même température constatée à l'aide du même instrument, il possède la même intensité calorifique.

Il résulte de tout cela :

1° *Que l'intensité calorifique possède tous les caractères des grandeurs mesurables ;*

2° *Que la valeur de l'intensité calorifique est caractéristique de la température.*

IV

UNITÉ DE MESURE DES INTENSITÉS CALORIFIQUES. — MESURE DES TEMPÉRATURES PAR LES INTENSITÉS CALORIFIQUES.

La mesure des intensités calorifiques se fait, comme celle de toute grandeur mesurable, en la comparant à l'une d'entre elles supposée déterminée et connue à laquelle on donne le nom d'unité.

Le choix de cette unité est, suivant l'usage, complètement arbitraire. Il est par conséquent possible de remplacer une unité par une autre, à la condition toutefois de faire connaître le rapport de la nouvelle unité à la première.

Pour fixer les idées, nous prendrons, au moins provisoirement, comme unité de mesure d'intensité calorifique *la quantité de chaleur contenue dans un centimètre cube d'hydrogène, lorsque celui-ci se trouve à la température de la glace fondante sous la pression de un mètre de mercure.*

Mesure de la température d'un système. — La température d'un système est définie par la température que prend le thermomètre à gaz, lorsque ce dernier, étant mis en communication calorifique avec le système, se trouve en équilibre de température avec lui.

Les principes exposés dans le paragraphe précédent conduisent à une méthode permettant de déterminer la température d'un système sans faire appel à aucun principe nouveau ni à aucune formule dont on pourrait soupçonner et contester l'exactitude.

Supposons en effet que le thermomètre employé contienne, à la température de la glace fondante, un volume v_0 d'hydrogène à la pression p_0, à laquelle correspond pour définition l'intensité calorifique I_0 prise pour unité. Soumettons cette masse d'hydrogène à une compression ou à une dilatation adiabatique, suivant que la température à évaluer est supérieure ou inférieure à celle de la

glace fondante, et supposons que cette compression ou dilatation soit telle que le thermomètre étant ensuite mis en communication calorifique avec le système, il se trouve immédiatement en équilibre thermique avec lui, ce que l'on reconnaîtra à la constance de la pression. Dans ces conditions, la température du système est égale à celle que le thermomètre a acquise par le fait de sa compression ou dilatation adiabatique. Dès lors, si le nouveau volume v est lié au volume v_0 par la relation :

$$\frac{v}{v_0} = \frac{m}{n},$$

l'intensité calorifique I correspondant à ce volume sera, d'après ce qui a été démontré, liée à l'intensité calorifique I_0 prise pour unité par la relation :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{n}{m},$$

on aura ainsi la mesure de l'intensité calorifique cherchée.

Cette manière de procéder, toute rigoureuse qu'elle soit, est cependant de réalisation difficile ; elle suppose en effet que la modification adiabatique amène immédiatement le gaz du thermomètre à la température d'équilibre. Il faudrait donc que celle-ci fût déjà approximativement connue ; et, dans tous les cas, on ne pourrait arriver à la déterminer exactement que par une série de tâtonnements, c'est-à-dire d'expériences permettant de se rapprocher du résultat cherché et finalement de l'atteindre. C'est, en d'autres termes, la méthode des approximations successives appliquée à la pratique, ce qui n'est pas sans présenter de grands inconvénients, surtout dans le cas présent, où il s'agit souvent de saisir une température pour ainsi dire au vol.

Il importe donc, pour la commodité de la mesure, d'avoir des formules établissant des relations entre l'intensité calorifique et le volume ou la pression du gaz, suivant que l'on opère à pression constante ou à volume constant, suivant les procédés déjà employés.

V

ÉTABLISSEMENT DES FORMULES THERMOMÉTRIQUES.

Nous prendrons comme point de départ de nos recherches les propriétés thermodynamiques des gaz, dont la première est la loi de Mariotte.

1° Loi de Mariotte. — *A une température donnée, le produit de la pression d'une masse gazeuse par son volume est constant. — Il est en outre fonction de cette température.*

La température étant définie par l'intensité calorifique, la loi de Mariotte est examinée par la formule :

$$pv = \mathcal{F}(\mathrm{I}). \tag{1}$$

2° *Dilatation infiniment petite d'une masse gazeuse sous pression constante.* — Soient p et v, la pression et le volume d'une masse gazeuse soumise à une intensité calorifique I. Proposons-nous de calculer l'augmentation de volume dv correspondant à une augmentation infiniment petite d'une intensité $d\mathrm{I}$.

Cette augmentation, qui est évidemment proportionnelle au volume v, est en même temps fonction de l'intensité calorifique I et de la pression actuelle p. On a donc :

$$dv = v\alpha(p,\mathrm{I})\, d\mathrm{I}. \tag{2}$$

La fonction $\alpha\,(p, \mathrm{I})$ qui représente l'augmentation de l'intensité de volume à partir de la pression p et de l'intensité I pour une augmentation d'intensité égale à l'unité, s'appelle *le coefficient de dilatation du gaz* correspondant à cette pression et à cette intensité.

Remplaçons dans la formule (2) v et dv par leurs valeurs tirées de la formule (1), il vient :

$$\alpha\,(p,\mathrm{I}) = \frac{\mathcal{F}'\,(\mathrm{I})}{\mathcal{F}\,(\mathrm{I})}. \tag{3}$$

Ce résultat montre que *le coefficient de dilatation d'un gaz sous pression constante est indépendant de cette pression et qu'il est uniquement fonction de l'intensité calorifique.*

Nous poserons donc :

$$\alpha(p, \mathrm{I}) = f(\mathrm{I}),$$

en sorte que la formule (2) devient :

$$dv = vf(\mathrm{I})\, d\mathrm{I}. \tag{3}$$

3° *Variation finie du volume d'une masse gazeuse sous pression constante pour une variation finie d'intensité calorifique. — Formule thermométrique du volume sous pression constante.*

De la formule (3) on tire :

$$\frac{dv}{v} = f(\mathrm{I})\, d\mathrm{I}$$

d'où en intégrant entre les limites I_0 et I :

$$\log \frac{v}{v_0} = \int_{\mathrm{I}_0}^{\mathrm{I}} f(\mathrm{I})\, d\mathrm{I},$$

ou

$$\log \frac{v}{v_0} = \mathrm{F}(\mathrm{I}) - \mathrm{F}(\mathrm{I}_0). \tag{4}$$

On tire de là :

$$\frac{v}{v_0} = e^{\mathrm{F}(\mathrm{I}) - \mathrm{F}(\mathrm{I}_0)} = \frac{e^{\mathrm{F}(\mathrm{I})}}{e^{\mathrm{F}(\mathrm{I}_0)}},$$

d'où :

$$v = v_0 \frac{e^{\mathrm{F}(\mathrm{I})}}{e^{\mathrm{F}(\mathrm{I}_0)}}. \tag{5}$$

C'est la formule thermométrique cherchée permettant de calculer le volume v d'une masse gazeuse soumise à l'intensité calorifique I, lorsqu'on connaît son volume v_0 sous l'intensité I_0.

On l'appelle *la formule des dilatations sous pression constante.*

Elle permet aussi, lorsqu'il en est besoin, de calculer la dilatation totale $v - v_0$, ou cette même dilatation rapportée à l'unité de volume, c'est-à-dire la quantité $\frac{v - v_0}{v_0}$.

4° *Formule thermométrique de la pression sous volume constant.*

Considérons une masse gazeuse de volume v_0 et de pression p_0 sous l'intensité I_0. A l'intensité I et sous la même pression p_0, son volume v est donné par la formule (5).

Par une modification isothermique conservant l'intensité I, ramenons ce volume à v_0 par une pression p. Nous aurons alors en vertu de la formule (1) :

$$pv_0 = p_0 v.$$

Remplaçons v par sa valeur fournie par la formule (5), il vient :

$$p = p_0 \frac{e^{F(I)}}{e^{F(I_0)}}. \tag{6}$$

C'est la formule cherchée. On l'appelle *formule des dilatations sous volume constant.* On voit qu'elle est de même nature que celle des dilatations sous pression constante.

On en tire par différentiation :

$$dp = p_0 e^{F'(I)} \frac{e^{F(I)}}{e^{F(I_0)}} dI.$$

d'où en divisant par la formule (6) :

$$\frac{dp}{p} = F'(I)\, dI,$$

ou

$$dp = pf(I)\, dI. \tag{7}$$

Cette nouvelle formule permet de calculer l'augmentation infiniment petite de pression sous volume constant pour une augmentation infiniment petite d'intensité dI. La fonction $f(I)$ est le coefficient d'augmentation de pression sous volume constant ; par extension de langage, on l'appelle *le coefficient de dilatation sous volume constant*, et l'on voit qu'il est égal au coefficient de dilatation sous pression constante.

5° *Loi de Gay-Lussac. — Formule caractéristique des gaz.* — La loi de Gay-Lussac qui exprime que tous les gaz se dilatent de la même manière pour la même élévation de température se traduit par ce fait que la fonction $f(I)$ et par suite la fonction $F(I)$ sont indépendantes de la nature du gaz.

Cela étant, considérons une masse gazeuse ayant le volume v_0 et la pression p_0 sous une intensité calorifique I_0, et supposons que, pour une nouvelle intensité I, elle occupe un nouveau volume v sous la pression p. Nous cherchons la relation qui existe entre les quantités v, p, I, v_0, p_0, I_0.

Pour cela imaginons que l'intensité calorifique passe de I_0 à I, la pression restant p_0, le volume deviendra :

$$v' = v_0 \frac{e^{F(I)}}{e^{F(I_0)}}.$$

Supposons ensuite que l'intensité I restant constante, la pression passe de p_0 à p, le volume devenant v, on aura :

$$pv = p_0 v',$$

d'où en remplaçant v' par la valeur précédente :

$$pv = p_0 v_0 \frac{e^{F(I)}}{e^{F(I_0)}} \tag{8}$$

ou

$$\frac{pv}{e^{F(I)}} = \frac{p_0 v_0}{e^{F(I_0)}}. \tag{9}$$

On obtient ainsi, sous une forme ou sous l'autre, ce qu'on peut appeler l'équation caractéristique de l'état gazeux, qui résulte de la combinaison des deux lois de Mariotte et de Gay-Lussac et les comprend l'une et l'autre comme cas particuliers.

Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$e^{F(I)} = \varphi(I),$$

et nous désignerons la fonction φ (I) sous le nom de *fonction thermométrique*. Les formules (5), (6) et (8) deviennent alors :

$$v = v_0 \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0} \tag{5'}$$

$$p = p_0 \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0} \tag{6'}$$

$$pv = p_0 v_0 \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0}. \tag{8'}$$

6° *Relation entre la pression et le volume dans une modification adiabatique. — Formule de Laplace.* — La définition des températures par les intensités calorifiques ne change rien aux considérations dans lesquelles on doit entrer relativement aux quantités de chaleur nécessaires pour produire une transformation déterminée sur une masse gazeuse ni à la nature des calculs à effectuer dans ce but. C'est ainsi en particulier qu'on est amené à considérer et à distinguer la chaleur spécifique à volume constant et la chaleur spécifique à pression constante, dont nous allons rappeler les définitions en les adaptant à notre nouvelle manière d'envisager les températures.

Considérons l'unité de masse gazeuse et supposons qu'elle occupe le volume v sous la pression p et l'intensité calorifique I. Faisons passer cette intensité de I à I + dI sans changer le volume; il faudra pour cela fournir au gaz une certaine quantité de chaleur dq_1. Le quotient

$$\frac{dq_1}{d\mathrm{I}} = c \tag{10}$$

est par définition *la chaleur spécifique à volume constant.*

Supposons au contraire que l'on fasse passer l'intensité calorifique de I à I + dI, mais sans changer la pression. Il faudra pour cela fournir au gaz une autre quantité de chaleur dq_2. Le quotient

$$\frac{dq_2}{d\mathrm{I}} = \mathrm{C} \tag{11}$$

est par définition *la chaleur spécifique à pression constante.*

La théorie et l'expérience montrent que le coefficient C est plus grand que le coefficient c. De plus, Laplace et Reech ont établi des formules qui ont conduit à des expériences permettant de mesurer le rapport $\frac{\mathrm{C}}{c}$. Ces expériences, réalisées, d'abord par Clément et Desormes, puis récemment par Maneuvrier, ont fourni les valeurs de ce rapport $\frac{\mathrm{C}}{c}$ et cela sans qu'il ait été nécessaire de se servir d'un autre instrument de mesure que le manomètre; les résultats obtenus sont donc indépendants de toute échelle de mesure des températures. On a pu également, ainsi que l'ont montré Newton et Laplace, mesurer $\frac{\mathrm{C}}{c}$ par la vitesse du son; toutefois les formules dont on fait usage dans ce but contiennent la température, ce qui est une raison pour

nous de ne pas tenir compte de ce mode particulier de détermination.

Néanmoins toutes les expériences faites sont concordantes et donnent 1,412 comme valeur moyenne du rapport $\frac{C}{c}$ pour les gaz diatomiques suffisamment voisins de l'état parfait, tels que l'hydrogène, l'oxygène, l'azote et l'oxyde de carbone. Cette valeur est d'ailleurs indépendante de la température.

Cela étant, posons :

$$\frac{C}{c} = \gamma. \tag{12}$$

Par une suite de considérations que nous n'avons pas à développer ici et qu'on trouve exposées dans les traités de Thermodynamique, Laplace a montré que, dans les différentes phases d'une modification adiabatique imposée à un gaz, le volume v et la pression p, variables l'un et l'autre, sont liés par la relation :

$$pv^{\gamma} = C^{te}. \tag{13}$$

C'est la formule de Laplace que nous avons annoncée et dont nous aurons à faire usage.

VI

RECHERCHE DE LA FONCTION THERMOMÉTRIQUE.

Nous nous proposons de rechercher la forme de la fonction $\varphi(I)$ qui figure dans les formules (5′), (6′) et (8′). Pour cela, nous allons interpréter théoriquement, à l'aide de formules précédemment établies, le procédé pratique que nous avons indiqué plus haut.

Supposons donc le gaz thermométrique ayant le volume v_0 et la pression p_0 en même temps que l'intensité I_0. Soumettons-le à une compression (ou à une dilatation) adiabatique capable de l'amener à l'intensité calorifique I qu'il s'agit d'évaluer. Soient

$$v = \frac{m}{n} = v_0 \tag{14}$$

le volume alors acquis par la masse gazeuse et p la pression réalisant l'équilibre de température entre le thermomètre et la source. D'après ce qui a été démontré plus haut, on a :

$$\text{(15)} \qquad I = \frac{n}{m} = I_0.$$

Appliquons à cet état du gaz la formule (8') caractéristique de l'état gazeux, nous aurons :

$$p \times \frac{m}{n} v_0 = p_0 v_0 \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0}$$

d'où :

$$\text{(16)} \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{n}{m} \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0}.$$

Appliquons d'autre part la formule (13) des modifications adiabatiques, il nous vient :

$$p \left(\frac{m}{n} v_0\right)^\gamma = p_0 v_0^\gamma,$$

d'où :

$$\text{(17)} \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{n}{m}\right)^\gamma.$$

La comparaison des formules (16) et (17) nous donne :

$$\frac{n}{m} \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0} = \left(\frac{n}{m}\right)^\gamma,$$

d'où :

$$\frac{\varphi(I)}{\varphi(I)_0} = \left(\frac{n}{m}\right)^{\gamma - 1},$$

ou

$$\frac{\varphi(I)}{\varphi(I_0)} = \frac{\left(\frac{n}{m} I_0\right)^{\gamma - 1}}{I_0^{\gamma - 1}},$$

c'est-à-dire enfin :

$$\text{(18)} \qquad \frac{\varphi(I)}{\varphi(I)^0} = \frac{I^{\gamma - 1}}{I_0^{\gamma - 1}}.$$

Les formules (5′), (6′) et (8′) deviennent ainsi :

$$v = v_0 \left(\frac{I}{I_0}\right)^{\gamma - 1}, \tag{19}$$

$$p = p_0 \left(\frac{I}{I_0}\right)^{\gamma - 1}, \tag{20}$$

$$pv = p_0 v_0 \left(\frac{I}{I_0}\right)^{\gamma - 1}. \tag{21}$$

Ce sont les formules cherchées.

Cette dernière peut s'écrire :

$$pv = \frac{p_0 v_0}{I_0^{\gamma - 1}} \cdot \gamma - 1$$

où

$$pv = RI^{\gamma - 1} \tag{22}$$

en posant

$$\frac{p_0 v_0}{I_0^{\gamma - 1}} = R.$$

On obtient ainsi la formule correspondant à la formule :

$$pv = RT$$

ordinairement employée.

VII

CALCUL DES CONSTANTES THERMOMÉTRIQUES.

La formule (19) est la formule thermométrique sous pression constante et la formule (20) la formule thermométrique sous volume constant. Ces formules sont absolument générales et peuvent être employées en prenant comme point de départ une température quelconque définie par une intensité calorifique I_0. Elles font connaître le rapport $\frac{I}{I_0}$ par l'un ou l'autre des rapports $\frac{v}{v_0}$ ou $\frac{p}{p_0}$.

Dans la pratique, on prend comme point de départ la température de la glace fondante, c'est-à-dire l'intensité calorifique sous un volume v_0 et une pression p_0 déterminés. Nous avons déjà dit à ce

sujet qu'on peut prendre pour unité d'intensité calorifique l'intensité calorifique de l'hydrogène sous la pression d'un mètre de mercure. Néanmoins, pour nous conformer à l'usage le plus fréquent, nous soumettrons cette unité de volume d'hydrogène à la pression atmosphérique moyenne mesurée par une colonne de mercure de 760 millimètres. Donc, à la condition d'opérer constamment sous la pression $p_0 = 700$ millimètres, on a :

$$v = v_0 \mathrm{I}^{\gamma - 1}.$$

De même, à la condition d'opérer sous le volume constant $v_0 = 1$ centimètre cube, on aura :

$$p = p_0 \mathrm{I}^{\gamma - 1};$$

d'où, dans le premier cas,

$$\mathrm{I} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}},$$

et dans le second :

$$\mathrm{I} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Or, parmi les températures en nombre infini possible, il en est une que l'on considère plus spécialement : c'est la température de l'eau bouillante, pour laquelle le rapport $\frac{v}{v_0}$ a la valeur $\frac{373}{273}$. En désignant par I_{eb} l'intensité calorifique correspondant à cette température, on aura :

$$\mathrm{I}_{eb} = \left(\frac{373}{273}\right)^{\frac{1}{0,412}},$$

en tenant compte de la valeur $\gamma = 1,412$. Tous calculs effectués, on trouve :

$$\mathrm{I}_{eb} = 2,134. \tag{23}$$

On peut encore, pour se conformer à la méthode jusqu'à présent en usage dans la mesure des températures, prendre pour unité d'intensité calorifique le centième de la différence entre les intensités calorifiques correspondant aux températures de l'eau bouillante et de la glace fondante sous la pression de 760 millimètres de mercure, et compter les variations d'intensité calorifique à partir de l'intensité I_0. Dans ces conditions, en posant :

$$I_{eb} = I_{100},$$

on aura :

$$I_{100} - I_0 = 100\,;$$

de même en désignant par I une intensité calorifique mesurée à l'aide de cette unité, on écrira :

$$I - I_0 = i,$$

d'où :

$$I = I_0 + i. \tag{24}$$

La quantité i désigne alors les variations *positive ou négative* d'intensité comptée à partir de l'intensité I_0.

Les intensités calorifiques ainsi mesurées peuvent encore être désignées, si l'on veut, sous le nom d'*intensités centigrades*, et il ne reste plus qu'à exprimer I_0 et I_{100} en fonction de la nouvelle unité, ce qui se fait par la résolution des équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{I_{100}}{I_0} = 2{,}134 \\ I_{100} - I_0 = 100. \end{array}\right.$$

On trouve ainsi :

$$I_0 = 88{,}183 \tag{25}$$

$$I_{100} = 188{,}183 \tag{26}$$

Nouvelle forme de la relation thermométrique. — Ecrivons :

$$I = I_0 + i,$$

la formule (29) devient :

$$v = v_0 \left(1 + \frac{1}{I_0}\, i\right)^{\gamma - 1},$$

posons alors :

$$\frac{1}{I_0} = \alpha ;$$

il vient :

$$v = v_0 (1 + \alpha i)^{\gamma - 1}, \tag{27}$$

formule analogue, mais non identique à la formule :

$$v = v_0 (1 + \alpha t)$$

jusqu'à présent employée pour le calcul des températures. La quantité constante α représente alors, non plus ce qu'on appelle dans l'ancien système le coefficient de dilatation du gaz, c'est-à-dire l'augmentation de l'unité de volume pour une élévation de température d'un degré, mais le quotient :

$$\frac{v^{\frac{1}{\gamma - 1}} - v_0^{\frac{1}{\gamma - 1}}}{v_0^{\frac{1}{\gamma - 1}} i},$$

lequel est constant et a pour valeur :

$$\alpha = \frac{1}{88,123} = 0,01134. \tag{28}$$

De toutes façons on retrouve la distinction entre les intensités relatives et les intensités absolues, comme dans l'ancien système, et le moyen de passer des unes aux autres. En effet, si l'on désigne par i une unité centigrade comptée à partir de I_0, on a :

$$I = I_0 + i = 88,123 + i.$$

Les intensités calorifiques absolues surpassent donc de 88,123 unités centigrades les intensités calorifiques comptées à partir de I_0. Le nombre 88,123 remplace le nombre 273 de l'ancien système ; il est, comme en le voit, notablement plus petit. Le *zéro absolu* d'intensité calorifique, lequel est un vrai zéro absolu, est de 88,123 unités centigrades au-dessous de l'intensité calorifique correspondant à la température de fusion de la glace. Cette différence de grandeur entre les deux nombres 88,123 et 273 tient à ce que la nouvelle unité n'a

pas la même relation de grandeur que l'ancienne avec les variations de volume du gaz.

Passage d'un système de mesure à l'autre. — Ce passage s'effectue à l'aide de la formule :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{I_0 + i}{I_0}$$

ou

$$\frac{I}{I_0} = 1 + \frac{i}{I_0},$$

dans laquelle $\frac{I}{I_0}$ représente la mesure de l'intensité en prenant I_0 pour unité, tandis que i réprésente l'intensité centigrade comptée à partir de I_0. En remplaçant donc dans le premier nombre I_0 par 1 et dans le second par 88,123, il vient :

$$I = 1 + \frac{i}{88,123}. \tag{29}$$

Cette formule, qui fournit I en fonction de i, permet, inversement, de calculer i en fonction de I.

Rapport entre les deux unités de mesure. — Dans le premier système, la quantité I_0 est représentée par 1, tandis que, dans le second, elle l'est par le nombre 88,123. Le rapport de la première unité à la seconde est donc représenté par le nombre :

$$88,123,$$

tandis que le rapport de la seconde unité à la première est :

$$\frac{1}{88,123} = 0,01134.$$

Relation entre les intensités calorifiques et les températures proprement dites. — On peut toujours supposer les températures ordinaires exprimées en températures absolues; il suffit pour cela d'ajouter à chaque température centigrade le nombre 273. Dans ces conditions, on sait que le volume v du gaz du thermomètre est exprimé par la formule :

$$v = v_0 \alpha T \tag{30}$$

dans laquelle α désigne le coefficient de dilatation commun $\frac{1}{273}$ du gaz. D'autre part, en faisant $I_0 = 1$, le même volume est exprimé en fonction de l'intensité calorifique par la nouvelle formule :

$$v = v_0 I^{\gamma - 1}. \tag{31}$$

La comparaison des formules (30) et (31) donne :

$$\alpha T = I^{\gamma - 1}. \tag{32}$$

Telle est la formule cherchée qui exprime la température absolue ordinaire en fonction de l'intensité calorifique. Elle comble la lacune signalée plus haut concernant l'absence d'une relation définie entre les températures telles qu'elles étaient jusqu'à présent définies et mesurées et les intensités de chaleur reconnues cependant comme causes dernières des phénomènes calorifiques.

Nous remarquerons que l'équation (32) peut s'écrire :

$$(\alpha T)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = I. \tag{32'}$$

Sous cette forme et en considérant I comme abscisse et T comme ordonnée, elle définit une parabole de degré $\frac{1}{\gamma - 1}$, qui ne diffère pas beaucoup d'une parabole du second degré, puisque, à cause de $\gamma = 1{,}412$, l'exposant $\frac{1}{\gamma - 1} = \frac{1}{0{,}412}$ diffère peu du nombre 2.

Nous sommes, d'après tout cela, en droit de dire que le problème de la thermométrie est désormais complètement résolu, sous la condition expresse que le rapport $\frac{C}{c} = \gamma$ des deux chaleurs spécifiques des gaz est indépendant de la température et de la pression.

Nous trouvons d'ailleurs une justification de nos raisonnements et des résultats qu'ils nous ont fournis, si nous calculons par notre méthode les quantités de chaleur qu'il faut fournir à une masse gazeuse pour la porter de l'intensité I à l'intensité $I + dI$, d'une part, sous pression constante, d'autre part sous volume constant. Le rapport de ces quantités de chaleur doit être évidemment égal au rapport γ des deux chaleurs spécifiques.

Cherchons d'abord la quantité de chaleur dq qu'il faut lui fournir

pour l'échauffer sous le volume constant v. L'intensité calorifique passant de I à I + dI, la quantité de chaleur à fournir à chaque unité de volume est égale à dI, et par conséquent la quantité totale de chaleur à fournir est :

$$dq = v d\mathrm{I}. \tag{33}$$

Pour trouver ensuite la quantité de chaleur dQ qu'il faut fournir pour échauffer le gaz sous pression constante, c'est-à-dire pour le porter sous pression invariable au volume $v + dv$ et à l'intensité I + dI, nous réaliserons cette transformation par la succession des opérations suivantes :

1° Nous ferons une dilatation adiabatique faisant passer le volume de v à $v + dv$; ce qui abaisse l'intensité calorifique d'une certaine quantité d'I;

2° Nous produirons un premier échauffement sous volume constant, pour ramener l'intensité calorifique à sa valeur primitive I;

3° Nous produirons un deuxième échauffement sous volume constant, de façon à passer de l'intensité I à l'intensité définitive I + dI.

La première opération n'exige aucun rapport ni aucune dépense de chaleur; mais elle produit un abaissement dI' de l'intensité calorifique, abaissement qu'il est facile de calculer. En effet le rapport des deux intensités calorifiques I et I — dI' avant et après la dilatation est en raison inverse des volumes v et $v - dv$. On a donc :

$$\frac{\mathrm{I} - d\mathrm{I}'}{\mathrm{I}} = \frac{v}{v + dv}$$

On tire de là :

$$d\mathrm{I}' = \frac{\mathrm{I} dv}{v + dv}$$

Il suit de là que, dans la deuxième opération qui rétablira l'intensité I, sans changer le volume $v + dv$, on devra fournir une quantité de chaleur dq_1 égale à $(v + dv)\, d\mathrm{I}'$, d'où, en tenant compte de la valeur précédente de dI' :

$$dq_1 = \mathrm{I} dv. \tag{34}$$

Enfin, dans la troisième opération qui amène l'intensité à I + dI, en maintenant toujours le volume $v + dv$, on devra fournir une

quantité de chaleur dq_2, qui est, d'après la formule (33), appliquée au volume $v + dv$,

$$dq_2 = (v + dv)\,dI,$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$dq_2 = v\,dI. \tag{35}$$

On a donc, pour la quantité totale dQ de chaleur fournie dans cette suite d'opérations :

$$dQ = dq_1 + dq_2,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des formules (34) et (35) :

$$dQ = I\,dv + v\,dI$$

ou

$$dQ = d(Iv). \tag{36}$$

Cela étant de la formule établie :

$$v = v_0 \frac{I^{\gamma-1}}{I_0^{\gamma-1}},$$

on tire

$$Iv = \frac{v_0}{I_0^{\gamma-1}} I^{\gamma},$$

d'où :

$$d(Iv) = \gamma v_0 \frac{I^{\gamma-1}}{I_0^{\gamma-1}}$$

ou

$$d(Iv) = \gamma v\,dI,$$

et par suite :

$$dQ = \gamma v\,dI. \tag{37}$$

Des formules (33) et (36) on tire :

$$\frac{dQ}{dq} = \gamma = \frac{C}{c},$$

ce qu'il fallait trouver.

Mais nous ne voulons pas terminer sans faire remarquer tout l'intérêt qui s'attache à la formule (36) :

$$dQ = d(Iv). \tag{36}$$

La quantité Iv représente, d'après notre manière de voir, la quantité de chaleur contenue dans la masse gazeuse considérée, à l'état où elle se trouve d'après les conditions qui déterminent cet état. Or nous savons que l'état d'une masse gazeuse, lequel dépend de deux variables indépendantes, peut être défini en particulier par son volume v et sa température, c'est-à-dire par son intensité calorifique I. Le produit Iv de ces deux variables définit donc cet état de la façon la plus complète, et nous venons de rappeler sa signification. Il est légitime, en dehors de toute interprétation possible, de lui donner un nom particulier, et nous l'appellerons *la puissance calorifique* de la masse gazeuse considérée.

Toute modification imposée, à partir de cet état, à la masse gazeuse entraîne une variation de sa puissance calorifique, et la formule (36) montre que cette variation est égale à la quantité de chaleur dQ mise en jeu dans cette transformation. Or, parmi toutes les transformations possibles, les plus simples et les plus fréquemment réalisées sont celles qui correspondent à des variations arbitraires de l'une ou de l'autre des variables indépendantes ou de toutes les deux. D'après cela, nous avons à considérer plus spécialement :

1° Les transformations dans lesquelles I seule varie, et qui correspondent par conséquent à un échauffement ou à un refroidissement sous volume constant;

2° Les transformations dans lesquelles v seul varie, et qui ont reçu le nom de modifications isothermiques;

3° Les transformations dans lesquelles I et v varient tous les deux. Ces transformations, qui n'ont pas reçu de nom particulier, sauf dans le cas où il n'y a pas d'échange de chaleur entre le gaz et le milieu ambiant et où la modification est dite adiabatique, peuvent être regardées, lorsqu'elles sont infiniment petites, comme produites par la coexistence ou la succession des deux premières supposées également infiniment petites.

Quelle que soit la transformation produite, la quantité de chaleur reçue ou dégagée par le gaz est exprimée par la formule (36). Donc, en particulier :

1° Si le volume est constant, on a :

$$dq_2 = v dI;$$

2° Si la température est constante, on a :

$$dq_1 = I dv;$$

3° Enfin, si la température et le volume varient, on a :

$$dQ = v dI + I dv.$$

Mais alors, si le gaz est soustrait à tout échange de chaleur, c'est-à-dire si $dQ = 0$, la formule (31) entraîne :

$$d(Iv) = 0$$

et par suite :

$$Iv = C^{te}. \tag{38}$$

Donc, *pendant toute la durée d'une modification adiabatique la puissance calorifique du gaz reste constante.* Cette proposition résultait d'ailleurs immédiatement de ce que nous avons dit plus haut sur le rapport des intensités calorifiques. Nous avons, en effet, explicitement admis que, dans deux phases différentes quelconques d'une même modification adiabatique, on a :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{v_0}{v},$$

d'où :

$$Iv = I_0 v_0 = C^{te}.$$

Nous compléterons cette étude purement thermométrique en en faisant l'application à la calorimétrie et à la thermodynamique et en particulier à la thermodynamique des gaz.

SUR LE CALCUL AVEC UNE ÉQUATION INDÉTERMINÉE DES CARACTÉRISTIQUES ENTRANT DANS UNE TABLE DE FACTEURS PREMIERS DES GRANDS NOMBRES;

Par Ernest LEBON.

1. Soient N, D et M des nombres appartenant à un système de progressions arithmétiques de base B.

Lorsque N admet un diviseur D, on a l'égalité :

$$DM = BK + I;$$

d'où l'on déduit que :

Si l'on divise par D *le produit* BK *et le reste* I, *la somme des restes obtenus égale* D.

ρ désignant la valeur absolue du reste négatif obtenu en divisant BK par D, R désignant le reste positif obtenu en divisant I par D,

Il y a égalité entre ρ *et* R.

Pour abréger, je dirai reste ρ et reste R.

2. Dans un précédent Mémoire [2], j'ai expliqué comment on pouvait calculer rapidement les restes ρ. J'ai déjà calculé et fait calculer un grand nombre de ces restes ; lorsque ce calcul sera terminé, et refait comme vérification, il sera possible de se servir de la Table des restes ρ. (Voir *Addition*, fin du présent Mémoire.)

Pour construire la Table qui donne les facteurs premiers d'un nombre aussi grand que l'on veut [3], la Table des restes ρ est nécessaire. N'ayant qu'une partie de cette Table, j'ai souvent trouvé la valeur d'une caractéristique k qui correspond à un reste donné ρ, égal au reste R, en cherchant le couple convenable de valeurs entières et positives de k et de x, qui satisfont à l'équation indéterminée :

$$\rho_k = \rho_1 k - Dx,$$

D, ρ et ρ_k étant des nombres positifs, D étant supérieur à ρ_1, à ρ_k et à k.

J'ai d'abord calculé la valeur de k quand $\rho_k = 1$, en appliquant la

(1) Mémoire exposé dans la *Séance du* 24 décembre 1910.

(2) *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, s. IX, t. IX, 1908.

(3) *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*, s. IX, t. IX, 1908 ; A.F.A.S., *Compte rendu du Congrès de Clermont-Ferrand*, 1908.

méthode fondée sur l'emploi des restes obtenus en cherchant le p. g. c. d. entre D et ρ_1. De cette valeur on déduit très rapidement la valeur de k quand ρ_k égale un nombre donné.

Je suis arrivé, quand $\rho_k = 1$, à trouver une formule donnant k en fonction des quotients.

Notons que cette formule, avec des signes convenables, peut être appliquée à tous les cas qui se présentent dans la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée à deux inconnues :

$$ax + by = 1.$$

3. Soit l'équation indéterminée à deux inconnues k et x :

$$\text{(E)} \qquad 1 = \rho_1 k - \mathrm{D}x.$$

L'opération de la recherche du p. g. c. d. entre D et ρ_1 est :

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
D	ρ_1	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	

On a successivement :

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{E}_1) & 1 = \rho_1 y_1 - r_1 x, \\
(\mathrm{E}_2) & 1 = r_1 y_2 + r_2 y_1, \\
(\mathrm{E}_3) & 1 = r_2 y_3 + r_3 y_2, \\
 & \dots\dots\dots\dots \\
(\mathrm{E}_{2n-1}) & 1 = r_{2n-2}\, y_{2n-1} + r_{2n-1}\, y_{2n-2}, \\
(\mathrm{E}_{2n}) & 1 = r_{2n-1}\, y_{2n} + r_{2n}\, y_{2n-1},
\end{array}$$

après avoir successivement posé :

$$\begin{array}{ll}
(1) & y_1 = k - q_1 x, \\
(2) & y_2 = q_2 y_1 - x, \\
(3) & y_3 = q_3 y_2 + y_1, \\
 & \dots\dots\dots\dots \\
(2n-1) & y_{2n-1} = q_{2n-1}\, y_{2n-2} + y_{2n-3}, \\
(2n) & y_{2n} = q_{2n}\, y_{2n-1} + y_{2n-2}.
\end{array}$$

4. Lorsque $r_{2n-1} = 1$, on a l'équation indéterminée :

$$(E_{2n-1})' \qquad 1 = r_{2n-2}\, y_{2n-1} + y_{2n-2},$$

où les inconnues sont y_{2n-1} et y_{2n-2}.

Lorsque $r_{2n} = 1$, on a l'équation indéterminée :

$$(E_{2n})' \qquad 1 = r_{2n-1}\, y_{2n} + y_{2n-1},$$

où les inconnues sont y_{2n} et y_{2n-1}.

On trouve aisément les couples de solutions entières qui satisfont soit à l'équation $(E_{2n-1})'$, soit à l'équation $(E_{2n})'$.

Quand on opère avec des nombres, de tout couple de solutions entières telles que y_{2n} et y_{2n-1}, on déduit successivement les valeurs entières correspondantes de y_{2n-2}, y_{2n-3}, ..., y_2, y_1, x, k, au moyen des équations $(2n)$, $(2n-1)$, ..., (3), (2), (1).

5. Au moyen du système d'équation (1), (2), ..., $(2n)$, j'ai tiré k d'abord en fonction de q_1, x et y_1 ; puis en fonctions de q_1, q_2, y_1 et y_2 ; ensuite en fonction de q_1, q_2, q_3, y_2 et y_3, etc. Je suis ainsi arrivé aux deux équations suivantes :

$$(2n-1)'' \qquad k = A_{2n-2}\, y_{2n-1} - B_{2n-1}\, y_{2n-2},$$
$$(2n)'' \qquad k = A'_{2n}\, y_{2n-1} - B'_{2n-1}\, y_{2n}.$$

Or, un couple de solutions données par l'équation $(E_{2n-1})'$ est :

$$y_{2n-1} = 0, \quad y_{2n-2} = 1 ;$$

et un couple de solutions données par l'équation $(E_{2n})'$ est :

$$y_{2n} = 0, \quad y_{2n-1} = 1.$$

Par suite, il suffit de faire les calculs avec un seul des coefficients des équations $(2n-1)''$ et $(2n)''$, ce qui est très rapide, et l'on a simplement :

$$(2n-1)''' \qquad k = -B_{2n-1},$$
$$(2n)''' \qquad k = A'_{2n}.$$

L'expression symbolique du coefficient B_{2n-1} est :

$$\begin{aligned} B_{2n-1} = {} & \Sigma_1^{2n-1} q_{2\alpha-1} + \Sigma_1^{2n-1} q_{2\alpha-1} q_{2\beta} q_{2\gamma-1} \\ & + \Sigma_1^{2n-1} q_{2\alpha-1} q_{2\beta} q_{2\gamma-1} q_{2\delta} q_{2\varepsilon-1} \\ & + \ldots + q_1 q_2 q_3 \ldots q_{2n-1}; \end{aligned}$$

dans les sommes les indices de q vont toujours en croissant; le premier Σ_1^{2n-1} représente la somme des quotients dont les indices sont impairs; la seconde représente la somme des produits de trois quotients dont les indices sont successivement un nombre impair, un nombre pair, un nombre impair; la troisième représente la somme des produits de cinq quotients dont les indices sont successivement un nombre impair, un nombre pair, etc.

L'expression symbolique du coefficient B est :

$$\begin{aligned} A'_{2n} = {} & 1 + \Sigma_1^{2n} q_{2\alpha-1} q_{2\beta} + \Sigma_1^{2n} q_{2\alpha-1} q_{2\beta} q_{2\gamma-1} q_{2\delta} \\ & + \Sigma_1^{2n} q_{2\alpha-1} q_{2\beta} q_{2\gamma-1} q_{2\delta} q_{2\varepsilon-1} q_{2\zeta} \\ & + \ldots + q_1 q_2 \ldots q_{2n}; \end{aligned}$$

les indices de q vont en croissant; le premier Σ_1^{2n} représente la somme des produits de deux quotients dont les indices sont successivement un nombre impair, un nombre pair; le second représente la somme des produits de quatre quotients dont les indices sont successivement un nombre impair, un nombre pair, etc.; le troisième représente la somme des produits de six quotients dont les indices sont successivement un nombre impair; un nombre pair, etc.

6. Premier exemple. — Soit l'équation indéterminée :

$$1 = 89k - 137x.$$

Le tableau de la recherche du p. g. c. d. entre 137 et 89 est :

	q_1 1	q_2 1	q_3 1	q_4 5	q_5 1
137	89	48	41	7	6
48	41	7	6	1	

Comme $r = r_{2n-1} = r_5 = 1$, on a l'équation :

$$(E_5) \qquad 1 = 6y_5 + y_4,$$

dont on prend le couple de solutions $y_5 = 0, y_4 = 1$.

On doit calculer k avec la formule $(2n-1)'''$; en mettant seulement, pour abréger l'écriture, les indices des lettres q, on a :

$$B_5 = (1) + (3) + (5) + (1.2.3) + (1.2.5) + (1.4.5) + (3.4.5) + (1.2.3.4.5);$$

d'après le tableau, on trouve :

$$\begin{aligned} B_5 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 5 \\ &= 20; \end{aligned}$$

donc $k = -20$. Et la moindre valeur positive de k est $137 - 20$ ou 117, à laquelle correspond $\rho_{117} = 1$.

A présent, pour avoir la valeur de k correspondante à $\rho_k = 83$, par exemple, il suffira d'écrire :

$$\begin{aligned} k &= \text{reste de } \frac{117.83}{137} \\ &= 121. \end{aligned}$$

7. Second exemple. — Soit l'équation indéterminée :

$$1 = 168k - 193x.$$

Le tableau de la recherche du p. g. c. d. entre 193 et 168 est :

	q_1 1	q_2 6	q_3 1	q_4 2	q_5 1	q_6 1
193	168	25	18	7	4	3
25	18	7	4	3	1	

Comme $r_{2n} = r_6 = 1$, on a l'équation :

$$(E_6) \qquad 1 = 3y_6 + y_5,$$

dont on prend le couple de solutions $y_6 = 0$, $y_5 = 1$.

On doit calculer k avec la formule $(2n)'''$; en mettant seulement, pour abréger l'écriture, les indices des lettres q, on a :

$$\begin{aligned} A'_6 = 1 &+ (1.2) + (1.4) + (1.6) + (3.4) + (3.6) + (5.6) + (1.2.3.4) + (1.2.3.6) \\ &+ (1.2.5.6) + (1.4.5.6) + (3.4.5.6) + (1.2.3.4.5.6) ; \end{aligned}$$

d'après le tableau, on trouve :

$$\begin{aligned} A'_6 &= 1 + 6 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 12 + 6 + 6 + 2 + 2 + 12 \\ &= 54 ; \end{aligned}$$

donc $k = 54$. C'est la moindre valeur positive de k, à laquelle correspond $\rho_{54} = 1$.

A présent, pour avoir la valeur de k correspondant à $\rho_k = 179$, par exemple, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} k &= \text{reste de } \frac{54.179}{193} \\ &= 16. \end{aligned}$$

ADDITION AU MÉMOIRE INTITULÉ :

Recherche rapide des facteurs premiers des nombres à l'aide de deux Tables de restes (s. IX, t. IX, 1908).

A un même diviseur premier D et à une même valeur de la caractéristique K, il correspond deux restes ρ et ρ' dont la somme est D.

Supposons que, pour tous les diviseurs D et toutes les caractéristiques K, on ait inscrit l'un sous l'autre les restes ρ et ρ', à l'intersection de la colonne K et de la ligne D. On aurait ainsi une *Table des restes ρ et ρ'* permettant de ne construire la Table des restes R que pour les indicateurs inférieurs à $\frac{1}{2}$ B.

Soit N un nombre dont l'indicateur est supérieur à $\frac{1}{2}$ B. Désignons par I et par I' deux indicateurs supplémentaires ; si $I < \frac{1}{2} B$, $I' > \frac{1}{2} B$. On a :

$$\begin{aligned} N &= BK + I' \\ &= B(K + 1) - I. \end{aligned}$$

On reconnaît que :

Un nombre BK + I' *est divisible ou non par* D, *selon que le reste* R

obtenu en divisant I *par* D *est égal ou non au reste* ρ' *correspondant à* D *et à* K + 1.

Par suite, quand N a pour caractéristique K et pour indicateur $I' > \frac{1}{2}$ B, il faut comparer R à la valeur de ρ' qui est sous la caractéristique suivante K + 1.

Exemple. — Soit N = 19 909 871. On a :

$$\begin{aligned} N &= B.38 + 510\,491 \\ &= B.39 - 19. \end{aligned}$$

Or, à l'intersection de la ligne du diviseur 307 et de la colonne de la caractéristique 39, on voit le reste 19 dans la ligne ρ'. Donc N, de caractéristique 38, admet le diviseur 307.

Il est évident que la dernière caractéristique inscrite dans la Table des restes ρ et ρ' devra être 196.

PRÉSENTATION A LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS

Par M. ERNEST LEBON

DE SON OUVRAGE INTITULÉ :

SAVANTS DU JOUR :

PAUL APPELL, BIOGRAPHIE, BIBLIOGRAPHIE DES ÉCRITS [1]

Séance du 26 *novembre* 1910

J'ai l'honneur de présenter à mes Collègues l'Opuscule consacré à M. PAUL APPELL, élu Membre de la Société Philomathique le 9 mars 1878, en les priant de me permettre de reproduire tout d'abord le paragraphe que M. CHARLIER a fait insérer au *Journal Officiel de la République Française* du 24 novembre 1910 (p. 9590), dans son compte rendu de la Séance du 14 novembre 1910 de l'Académie des Sciences.

En présentant à l'Académie la quatrième notice de la collection des *Savants du jour*, entreprise par le professeur Ernest Lebon, agrégé de l'Université, l'auteur bien connu de l'*Histoire de l'Astronomie* et de l'*Histoire des Sciences mathématiques*, le secrétaire perpétuel, M. Gaston Darboux, s'exprime en ces termes :

« Cette quatrième notice est encore consacrée à un géomètre, et j'ajoute à un de nos confrères les plus sympathiques, Paul Appell, doyen et professeur de mécanique à la Faculté des sciences de Paris.

« On y remarque le même soin, la même compétence, la même disposition et la même exactitude que dans les notices précédentes. J'y dois signaler tout particulièrement la biographie qui ouvre le volume et qui a été rédigée par M. E. Lebon. Elle contient les détails les plus touchants sur la vie et la famille de notre confrère, Alsacien d'origine et qui a toujours conservé au fond du cœur l'affection la plus ardente pour le pays où s'est écoulée sa jeunesse et où il prend tant de plaisir à retourner chaque année.

« Ce nouveau volume est une contribution précieuse à l'histoire des

[1] Un volume grand in-8° (28-18) de VIII-72 pages, papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure. Paris, Gauthier-Villars, 10 novembre 1900.

sciences, et l'on doit désirer que M. E. Lebon continue avec la même ardeur et le même talent l'œuvre si utile et si française à laquelle il s'est consacré. »

En faisant précéder les sections d'analyse et de géométrie d'appréciations dues à des savants, M. Ernest Lebon a englobé dans son travail, qui est une véritable œuvre de bénédictin, des éléments qui font oublier la sécheresse inévitable de suite d'énumérations de titres d'écrits, bien que ces titres soient le plus souvent accompagnés de sobres explications et que l'auteur ait introduit dans son travail une analyse du *Traité de Mécanique rationnelle* de M. P. Appell.

En somme, M. Lebon est parvenu à composer un ouvrage qui est à la fois intéressant pour les personnes qui désirent connaître, seulement dans son ensemble, l'œuvre de M. Paul Appell, et très utile à celles qui se livrent à des études et des recherches dans le domaine si étendu de l'analyse, de la géométrie et de la mécanique.

En faisant remarquer que M. P. Appell a bien voulu faire lui-même le classement des Mémoires et Notes d'Analyse et qu'il a approuvé la dernière épreuve d'imprimerie de cet opuscule, je demande que l'on veuille bien me permettre de reproduire les premières lignes de la *Notice* que j'ai composée sur la *Vie et les Travaux* de M. Paul Appell.

M. *Paul-Emile* Appell naquit à Strasbourg, chef-lieu de l'ancien département du Bas-Rhin, le 27 septembre 1855. Son père, Jean-Pierre Appell, avait un atelier et un petit magasin de teinturerie place Saint-Étienne, au fond de la cour d'une maison appelée le *Ritterhus* en parler strasbourgeois, grande et ancienne construction surmontée de plusieurs étages de greniers auxquels on accède par un escalier de pierre tournant dans une tour: ce vieux bâtiment était rempli d'enfants qui se livraient à des jeux sans fin dans la cour ou dans les greniers. Le jeune Paul Appell fut mis au Collège Saint-Arbogast, dépendant de l'évêché, dirigé par un homme intelligent et bon, d'une haute conscience, d'un ardent patriotisme, l'abbé Uhrin. Les vacances se passaient au village natal de sa mère, Élisabeth Müller, le *Klingenthal*, situé dans une étroite et longue vallée des Vosges orientales, entre le mont Saint-Odile et le Heidenkopf, toute remplie de la fraîcheur des eaux descendant de la montagne, et des bruits d'une fabrique d'armes blanches ayant appartenu à l'État Français de Louis XV à Louis-Philippe. Sa famille était profondément attachée à la France et aux idées de justice et de liberté mises en action par la Révolution française. Son père, comme soldat français, dans une petite opération militaire en Corse, avait reçu au pied une blessure dont il souffrit toute sa vie. Son frère, Charles Appell, né d'un premier mariage, de treize ans plus âgé que lui, s'engagea à dix-sept ans dans l'armée française : il prit part à la guerre d'Italie et fut envoyé, après la campagne, en congé de convalescence. Quand le père mourut, en 1869, ce frère aîné devint le conseiller et l'éducateur du

jeune collégien, auquel il fit partager son amour passionné pour les longues courses dans les solitudes boisées des Vosges, pour les chasses patientes de la montagne et pour les chasses abondantes et faciles de la plaine d'Alsace. Il s'établit alors entre les deux frères une affection étroite, une tendresse virile chaque jour plus profonde. Pendant que le caractère de l'adolescent était ainsi développé vers l'action, l'influence d'une mère d'élite, réfléchie et laborieuse, douce mais obstinée, le poussait au travail régulier et persévérant.

Le collège Saint-Arbogast ayant été fermé en 1868, le jeune Paul Appell passa un an en troisième au petit séminaire de Strasbourg, et, pendant l'année scolaire 1869-1870, il suivit le cours de la classe de seconde du lycée. La guerre ayant été alors déclarée, il vit arriver la belle armée d'Afrique, puis les sombres jours, la défaite et l'investissement. Sa famille était restée à Strasbourg pendant le siège ; son frère, après avoir servi comme ambulancier volontaire sur le champ de bataille de Wœrth, rentra à Strasbourg et s'engagea immédiatement dans la Compagnie de francs-tireurs commandée par Liès-Bodard, professeur à la Faculté des Sciences. Paul Appell, âgé de quatorze ans, chercha à se rendre utile en aidant dans une cantine provisoire, installée brasserie Piton, à nourrir de pauvres gens sans travail et sans ressources. Après la capitulation, tous les établissements d'enseignement étant fermés en Alsace, il fut envoyé au Klingenthal. Son frère Charles, sorti de la ville en échappant aux Allemands, put rentrer en France par le Hohwald et les Hautes-Vosges, et reprit du service dans la légion d'Alsace-Lorraine ; en 1871, il fut chargé en Alsace, par le Gouvernement de la Défense Nationale, d'une périlleuse mission, interrompue par l'armistice. Vinrent alors les événements les plus tristes de tous : l'élection des derniers députés d'Alsace-Lorraine, leur protestation à l'Assemblée Nationale contre l'annexion, l'arrachement brutal des deux Provinces si attachées à la France. La famille Appell dut se séparer : la mère et le frère Charles restèrent en Alsace et devinrent officiellement allemands ; le jeune Paul prit un permis d'émigration et alla opter à Nancy pour la nationalité française. Dans ces séparations douloureuses qui déchirèrent alors toutes les familles alsaciennes et lorraines, on ne saurait dire quels sont ceux qui firent le sacrifice le plus grand et le plus utile, ceux qui partirent, ou ceux qui restèrent...

De l'année 1876 à l'année 1892, M. P. Appell a publié un grand nombre de Mémoires et de Notes en Analyse pure, en Géométrie infinitésimale, en Géométrie analytique et en Mécanique rationnelle. J'ai donné dans la *Notice* une analyse succincte des principaux de ces écrits, et dans le corps du Livre des éclaircissements sur la plupart des autres. Plusieurs récompenses furent décernées à M. P. Appell au sujet de ses travaux mathématiques, notamment, le 21 janvier 1889, une médaille d'or dans le Concours international, institué par le roi de Suède et de Norvège, Oscar II, à l'occasion du 60e anniversaire de sa naissance ; et, le 21 décembre 1885, le Prix Bordin pour son

Mémoire sur les Déblais et les Remblais. Toutes les remarquables recherches de M. P. Appell le firent élire, le 7 novembre 1892, membre de l'Académie des Sciences, dans la Section de Géométrie. Pendant les années qui suivirent cette élection, il continua ses recherches en Analyse pure et en Analyse appliquée à la Mécanique. Les découvertes de M. P. Appell dans cette dernière branche des Mathématiques ont trouvé leur place dans son *Traité de Mécanique rationnelle*, dont la publication a été commencée en 1893 : les diverses éditions des trois volumes de cet Ouvrage, qui est très apprécié, sont analysées au début de la IVe Section de cet Opuscule.

Le 1er avril 1903, M. P. Appell fut élu Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris et, en 1904, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique ; de plus, il fait partie de la section permanente de ce Conseil. Ces fonctions absorbantes l'ont contraint à consacrer la plus grande partie de son activité à l'étude des questions relatives à l'organisation de l'Enseignement supérieur en France. Ses idées sur l'éducation et les études sont exposées dans plusieurs Discours et Articles.

Je demande une nouvelle autorisation, celle de terminer cette Présentation en lisant les dernières lignes de la *Notice*.

La vie de M. Paul Appell a toujours été d'une extrême simplicité, en rapport avec les traditions alsaciennes ; on peut dire qu'elle a été partagée entre deux sentiments : l'amour du travail et de l'action scientifique, le désir passionné de voir de nouveau réunies sa grande et sa petite patrie, la France et l'Alsace. Tous les ans, pendant les grandes vacances, il va se reposer et songer dans le pittoresque pays alsacien où son enfance s'est écoulée heureuse, dans les forêts des Vosges dont il a pénétré le charme grave et profond, en chassant avec son malheureux frère, et qu'il aime maintenant à parcourir en promeneur et à faire connaître à ses amis de France.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES DU TOME II

Pages.

Appell (P.). — Biographie, bibliographie des écrits. — E. Lebon..... 178
Banquet annuel..... 68
Biographie de P. Appell. — E. Lebon..... 178
— G. Darboux — 59
— E. Picard — 136
Caractéristiques d'une table de facteurs premiers. — E. Lebon..... 171
Comptes rendus des séances..... 65, 141
Cellules nerveuses spinales. — R. Legendre..... 54
Crevettes à mâles dimorphes. — H. Coutière..... 71
Darboux (G.). — Biographie, bibliographie des écrits. — E. Lebon..... 59
Décomposition des grands nombres en facteurs premiers. — E. Lebon.... 45
Définition et mesure des températures. — J. Deschamps..... 144
Dissociation de la molécule d'iode. — C. Matignon..... 88
Facteurs premiers des grands nombres. — E. Lebon..... 45, 171
Géométrie analytique (Notes). — G. Deschamps..... 9
Grands nombres (facteurs premiers). — E. Lebon..... 45, 171
Golgi (réseau interne de). — R. Legendre..... 54
Intensités calorifiques. — J. Deschamps..... 144
Iode (dissociation de la molécule). — C. Matignon..... 88
Liste des membres de la société..... 2
Lois (décomposition des nombres en facteurs premiers). — E. Lebon..... 45
Mâles dimorphes des crevettes du genre *Saron*. — H. Coutière..... 71
Notes de géométrie analytique. — J. Deschamps..... 9
Oiseaux sédentaires du Pungoué et du bas Zambèze. — A. Ménégaux..... 93
E. Picard, biographie, bibliographie des écrits. — E. Lebon..... 136
Pungoué (oiseaux). — A. Ménégaux..... 93
Réseau interne de Golgi. — R. Legendre..... 54
Saron (mâles dimorphes). — H. Coutière..... 71
Sédentaires (oiseaux) du bas Zambèze. — A. Ménégaux..... 93
Table des facteurs premiers des grands nombres. — E. Lebon..... 171
Températures (mesure et définition). — J. Deschamps..... 144
Théorèmes et lois (facteurs premiers des grands nombres). — E. Lebon... 45
Zambèze (Bas), Oiseaux sédentaires. — A. Ménégaux..... 93

TABLE DES AUTEURS

Pages.

H. Coutière. — Les crevettes à mâles dimorphes du genre *Saron*..... 71

J. Deschamps. — Notes de géométrie analytique..... 9

— Définition et mesure des températures par les intensités calorifiques..... 144

E. Lebon. — Théorèmes et lois pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers..... 45

— G. Darboux, biographie, bibliographie analytique des écrits. 59

— E. Picard, — — 136

— P. Appell, — — 178

— Calcul des caractéristiques d'une table des facteurs premiers des grands nombres..... 171

R. Legendre. — Le réseau interne de Golgi des cellules nerveuses spinales..... 54

C. Matignon. — Sur la dissociation de la molécule d'iode..... 88

A. Ménégaux. — Sur les oiseaux sédentaires du Pungoué et du bas Zambèze..... 93

Tours, imprimerie Deslis Frères, 6, rue Gambetta.

TABLE DES MATIÈRES DU FASCICULE IV-V-VI

Pages.
Extraits des comptes rendus des séances..... 141
J. Deschamps. — Définition et mesure des températures par les intensités calorifiques..... 144
E. Lebon. — Calcul avec une équation indéterminée des caractéristiques d'une table de facteurs premiers..... 171
— P. Appell, biographie, bibliographie des écrits..... 178

LE PRIX DES TIRÉS A PART EST FIXÉ AINSI QU'IL SUIT :

	25 ex.	50 ex.	75 ex.	100 ex.	150 ex.	200 ex.	250 ex.
Une feuille.....	4.50	5.85	7.20	8.10	10.60	12.85	14.85
Trois quarts de feuille..	4 »	5 »	6.10	7 »	9 »	10.60	12.15
Une demi-feuille.....	3.15	4 »	5 »	5.60	7.20	8.10	9 »
Un quart de feuille...	2.70	3.60	4.25	4.75	5.60	6.30	8.85
Un huitième de feuille.	2 »	2.70	3.15	3.60	4.05	4.50	5 »
Plusieurs feuilles.....	4 »	5.40	6.30	7.20	9 »	11.70	14 »

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

1re série :	1789-1805	3 volumes in-4°
2e série :	1807-1813	3 volumes in-4°
3e série :	1814-1826	13 fascicules in-4°
4e série :	1832-1833	2 volumes in-4°
5e série :	1836-1863	28 fascicules in-4°
6e série :	1864-1876	13 fascicules in-8°
7e série :	1877-1888	11 volumes in-8°

Chaque année pour les Membres de la Société ..... 5 francs
— pour le public ..... 12 —

Mémoires originaux publiés par la Société Philomathique

A L'OCCASION DU

CENTENAIRE DE SA FONDATION

1788-1888

Le recueil des mémoires originaux publié par la Société Philomathique à l'occasion du centenaire de sa fondation (1788-1888) forme un volume in-4° de 437 pages, accompagné de nombreuses figures dans le texte et de 24 planches. Les travaux qu'il contient sont dus, *pour les sciences physiques et mathématiques*, à : MM. Désiré André; E. Becquerel, de l'Institut; Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Institut; Bouty, de l'Institut; Bourgeois; Descloizeaux, de l'Institut; Fouret; Gernez; Hardy; Haton de La Goupillère, de l'Institut; Laisant; Laussedat; Léauté, de l'Institut; Mannheim; Moutier; Peligot, de l'Institut; Pellat; — *pour les sciences naturelles*, à : MM. Alix; Bureau; Bouvier, de l'Institut; Chatin, de l'Institut; Drake del Castillo; Duchartre, de l'Institut; H. Filhol, de l'Institut; Franchet; Grandidier, de l'Institut; Henneguy, de l'Institut; Milne-Edwards, de l'Institut; Mocquard; Poirier; A. de Quatrefages, de l'Institut; G. Roze; L. Vaillant.

En vente au prix de 35 francs

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ, A LA SORBONNE

TOURS, IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES, 6, RUE GAMBETTA.

630

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01526 6513